40
324

40
324 (2

B. No. 9.
40
324 (2)
Fw M. 2

Grundriß der reinen Mathematik

vorzüglich

für angehende Artilleristen und Ingenieurs

entworfen

von

C. G. Zimmermann,

Doctor der Philos., Professor und Pror. am Fr.-Gymn., Mitglied der wissenschaftlichen Direkzion und Lehrer der reinen Mathematik und praktischen Geometrie an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule, Lehrer der praktischen Geometrie und Maschinenlehre an der Königl. Bau-Akademie.

Zweiter Theil,

welcher die ebene Trigonometrie, Körperlehre und Theorie der Kegelschnitte enthält.

Mit 4 Kupfertafeln.

Berlin 1818.
Gedruckt in der J. F. Ungerschen Buchdruckerei.

(Preis 1 Rthlr. 20 Gr.)

KÖN. 5 DIVISIONS SCHULE
Deutsch...
Q. n. 8252
(447)

Ebene Trigonometrie

mit

einigen Anwendungen

entworfen

von

C. G. Zimmermann,

Dr. der Philos., Professor und Pror. am Fr.-Gymn., Mitglied der wissenschaftlichen Direkzion und Lehrer der reinen Mathematik und praktischen Geometrie an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule, und Lehrer an der Königl. Bau-Akademie.

Mit einer Kupfertafel.

Berlin, 1818.

Gedruckt in der J. F. Ungerschen Buchdruckerei.

(Preis 16 Gr.)

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Bayerische Staatsbibliothek München

I. Abschnitt.

a) Von der Erkl. der trigonometr. Linien.

§. 1. Die Trigonometrie ist eine Wissenschaft, welche aus drei gegebenen Stücken eines Dreieckes, die übrigen durch Rechnung finden lehrt. Man theilt sie in die ebene und sphärische ein. Jene betrachtet die ebenen, durch gerade Linien begrenzten Dreiecke, so wie sie in der Geometrie vorgekommen sind, doch so, daß die gegebenen Stücke durch Zahlen ausgedruckt und daß unter denselben allemahl eine Seite befindlich seyn muß; indessen ist sie nicht hierauf allein eingeschränkt, sondern sie umfaßt noch viele andere Lehren über die Verbindung, Zusammensezzung, Theilung der Winkel und den damit zusammengehörigen Bogen, über die gegenseitigen Beziehungen und Lage der geraden Linien und den davon abhängigen Bogen 2c. — Dreiecke, deren Seiten, Bogen größter Kreise auf einer Kugel sind, machen,

bekanntlich, den Gegenstand der sphäri-schen Trigonometrie aus, deren Aufgaben der Einschränkung nicht bedürfen, daß unter den gegebenen Stücken, allemal eine Seite enthalten seyn müsse.

Anm. Man mag Triangel mit noch so vollkommenen Werkzeugen verzeichnen und auftragen, so werden sich doch bei weiten Abmessungen, selbst bei der größten Sorgfalt bedeutende Fehler einschleichen. Durch Rechnung hingegen gelangt man zu einer weit größern Schärfe. Es werden Zahlen gesucht, weil alle Größen, die Seiten nebst dem Winkel, oder die Winkel nebst der Seite in Zahlen ausgedruckt sind, so, daß Zeichnungen nur ein Hülfsmittel der Darstellung und ein sinnliches und unvollkommenes Bild einer weit richtigern und vollständigern Berechnung abgeben, wodurch man nöthigen Falles Zeichnungen gänzlich entbehren kann. Durch diesen einzigen Vortheil der Trigonometrie ist man im Stande, in alle Theile der ausübenden Mathematik mehr Gewißheit und Genauigkeit einzuführen, als es ohne sie geschehen konnte.

§. 2. Der Kreis ist eine in sich selbst laufende Linie. Er hat daher so wenig einen Anfangspunkt als einen Endpunkt. Soll er aber zu gewissen Bestimmungen dienen, so muß man irgend einen Punkt, der jedesmaligen Absicht gemäß, zum Anfangspunkt eines Bogens oder Kreises machen. Ja man kann sogar um einer größern Allgemeinheit Willen, den Umfang des Kreises wiederholentlich in sich selbst zu-

rückkehren lassen, und alsdann gewisse Linien so festsetzen, daß sie nicht allein zu Einem Bogen, sondern zu diesem Bogen nebst dem Vielfachen der ganzen Kreise gehören. Dieses wird durch nachfolgende Erklärungen mehr Deutlichkeit erhalten, und ist um so nöthiger, da in der Anwendung Bogen vorkommen, die über 90°, 180°, rc. gehen. Dadurch siehet man sich genöthiget, die zu solchen Bogen gehörigen Linien in Betrachtung zu ziehen, und ihre Beziehung auf einander näher zu bestimmen.

Anm. 1. Von zweien Winkeln, die so beschaffen sind, daß sie einander zu zweien Rechten ergänzen, heißt gegenseitig der eine, das Complement des andern. Dasselbe gilt von zweien Bogen (Fig. 1.) AB und BK, deren Summe = 90° beträgt. Ist z. B. AB = 70°, BK = 20°, so ist der Bogen von 70°, das Complement von 20° und dieser, das Complement von jenem nehmlich, der Bogen von 20° ist das Complement des Bogens von 70°. Daher ist in jedem rechtwinkligen Dreiecke, der eine der spitzen Winkel das Complement des andern, so wie dieser von jenem, weil ihre Summe einem Rechten gleich ist.

Anm. 2. Findet die gedachte Beziehung zweier Winkel oder Bogen bei Nebenwinkeln oder solchen Bogen Statt, deren Summe 180° beträgt, so pflegt man bisweilen den einen das Supplement des andern, und zwar auch auf wechselseitige Art zu nennen.

§. 3. Erkl. Eine gerade Linie BD, welche (Fig. 1.) aus dem Endpunkte B eines von A anfan-

genden Bogens lothrecht auf den Halbmesser AC des durch den Anfangspunkt dieses Bogens gehenden Kreises, herabgelassen wird, heißt der Sinus des Bogens AB oder des von AB gemessenen Winkels ACB am Mittelpunkte.

Zus. 1. Verlängert man nun den Sinus, bis er den Kreis auf der andern Seite des Halbmessers in R trifft, so stellt die Linie BDR eine Sehne des Bogens BAR = 2AB vor, auf welcher CA senkrecht steht. Setzt man nun den Winkel ACB oder dessen Bogen AB = α, so läßt sich der Sinus eines Bogens α als die Hälfte, einer zum doppelten Bogen gehörigen Sehne betrachten, d. h. es ist $\sin \alpha = \frac{1}{2} \text{chord } 2\alpha$, eine Vorstellung, durch welche uns der Sinus überall leicht anschaulich wird. So ist z. B. die halbe Sehne eines Bogens von 60°, der Sinus eines Bogens von 30°; die halbe Sehne eines Bogens von 40°, ist der Sinus eines Bogens von 20°, die halbe Sehne eines Bogens von 90° ist der Sinus eines Bogens von 45° rc.

Zus. 2. Verbindet man nun diese Vorstellungen, mit den regulären in der Geometrie betrachteten Polygonen, die sich mit vollkommener Genauigkeit in Kreise einzeichnen lassen, so ergibt sich, daß ihre Seiten, Sehnen sind, deren Hälften zu den halben, von den Sehnen abgeschnittenen, Bogen als Sinus ge-

hören. So ist die Seite eines im Kreise liegenden Quadrats, die Sehne eines Bogens von 90°, also ihre Hälfte der Sinus von 45°; die Seite eines regulären im Kreise liegenden Fünfeckes, die Sehne eines Bogens von 72°, ihre Hälfte also der Sinus eines Bogens von 36°; die Seite eines regulären Sechseckes die Sehne eines Bogens von 60°, ihre Hälfte der Sinus des Bogens von 30°. Die Seiten des Sechseckes aber sind, jede für sich genommen, dem Radius gleich. Daher ist der Sinus von 30° allemal so groß, als der halbe Radius. Die Seite eines im Kreise liegenden Zehneckes, ist die Sehne des Bogens von 36°, folglich ihre Hälfte der Sinus eines Bogens von 18°. — Anstatt Sinus eines Bogens α schreibt man wie oben sin. α.

Zus. 3. Zu größern Bogen gehören größere Sehnen. Die größte Sehne ist der Durchmesser, welcher zum Halbkreise gehört. Es wachsen daher die Sinus mit den Bogen, wie dieses auch aus der Figur zu ersehen ist, der größte Sinus aber ist die Hälfte der größten Sehne, also dem Radius gleich. Daher nennt man diesen zu einem Bogen von 90° gehörigen Sinus, den Sinus totus. Läßt man einen Perpendikel aus den Endpunkten solcher Bog., die $>90°$ sind, auf den Durchm. herab, so werden sie kleiner

als der Halbmesser, und es nehmen daher die Sinus der Bogen über 90° wieder ab.

Zus. 4. Hieraus erhellet nun auch, daß der Sinus bei einem sehr kleinen Bogen, selbst sehr klein und von dem Bogen nicht merklich zu unterscheiden ist, indem Sinus und Bogen beinahe zusammen fallen. Dann nimmt der Sinus mit dem Bogen so lange zu, bis dieser 90° und jener dem Halbmesser gleich wird. Im zweiten Quadranten nimmt der Sinus wieder ab, nahe an 180° fällt er mit dem Bogen zusammen und verschwindet, wenn jener = 180° wird. Im dritten und vierten Quadranten findet zwischen dem Sinus und seinem Bogen dieselbe Relation in umgekehrter Ordnung Statt, wie im ersten und zweiten, nur ist hier (Fig. 1.) der Sinus des Bogens AKHQ, der von Q nach O gehende Perpendikel QO und des Bogens AKHLR, der Perpendikel RD. Es ist demnach, wenn r den Halbmesser bezeichnet: $\sin 0 = 0$, $\sin 90° = r$, $\sin 180° = 0$, oder wenn $r = 1$ ist, so ist $\sin 0 = 0$, $\sin 90 = 1$, $\sin 180 = 0$. Setzt man nun den Halbkreis $= \pi$; so ist $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$; $\sin \pi = 0$.

Zus. 5. Ist also der Sinus eines Bogens unter 180° = 1, so ist der Bogen selbst = 90° und ist der Sinus eines Bogens, der nicht über 180°

geht, $=0$; so ist der dazu gehörige Bogen entweder 0, oder 180°.

Zus. 6. Der Bogen AB macht mit dem Bogen BK zusammen 90° aus. Daher ist der Sinus des Bogens AB, zugleich der Sinus des Complements von BK (1.). Um diesen Ausdruck zu verkürzen, sagt man auch anstatt BD ist der Sinus des Complements von BK, BD ist der Cosinus von BK; und schreibt: es ist BD $=$ sin AB, aber es ist auch BD $=$ cos BK. Wäre z. B. AB $= 70°$ und BK $= 20°$; so ist BD $=$ sin 70° aber auch $=$ cos 20°.

§. 4. Erkl. Läßt man nun aus dem einen Endpunkte B des Bogens BK einen Perpendikel BG auf den, durch den andern Endpunkt K gezogenen Durchmesser KGL, herab, so ist BG der Sinus des Bogens BK. Es macht aber BK mit AB einen Bogen von 90°. Daher ist der Sinus des Bogens BK auch der Sinus des Complements von AB, d. h. es ist sin BK $=$ cos AB.

Zus. 1. Die Figur CDBG ist ein rechtwinkliges Parallelogramm, worin BD $=$ GC und BG $=$ DC ist. Aus diesem Grunde nennt man auch den Theil des Halbmessers zwischen D und C den Cosinus von AB. Setzt man wie vorhin den Bogen AB oder den von ihm gemessenen Winkel BCD $= \alpha$, so ist

BK $= 90° - \alpha$, folglich ist BD $=$ sin AB $=$ sin $\alpha =$ sin $(90° - \text{BK}) =$ cos BK; und umgekehrt DC $=$ BG $=$ sin $(90° - \alpha) =$ cos α. Ist demnach $\alpha = 70°$, so ist BD $=$ sin $\alpha =$ cos $(90 - \alpha) =$ cos $20°$ und sin $20° =$ sin $(90 - \alpha) =$ cos $\alpha =$ cos $70°$. Also ist sin $30° =$ cos $(90° - 30°) =$ cos $60°$ und cos $30° =$ sin $(90° - 30°) =$ sin $60°$.

Zus. 2. Betrachtet man nun das rechtwinklige △ BCD, worin der W. BCD$=\alpha$ gesetzt worden ist, so kann man die Seiten BD, BC, CB auf die Art, wie in der Geometrie gezeigt worden, durch Catheten und Hypotenuse ausdrucken; man kann sie aber auch durch die jetzt erklärten Benennungen bezeichnen, indem BD $=$ sin α; DC $=$ cos α und CB $=$ sin. tot. für den Halbmesser $= 1$ ist.

Zus. 3. Aus (Fig. 1.) kann man nun ersehen, daß die Cosinus DC immer kleiner werden, je größer der mit ihnen zusammengehörige Bogen AB wird. So wie also die Bogen im ersten Quadranten wachsen, so nehmen ihre Cosinus ab. Siehet man nun auf die beiden Grenzpunkte eines Bogens von $90°$; so ist der Cosinus $= r$, d. i. dem Halbmesser gleich, wenn der Bogen AB $= 0$, d. h. noch keine Größe hat, er verschwindet, d. h. wird 0, wenn der Bogen eine Größe von $90°$ erreicht hat und ist, bei einem

sehr kleinen Bogen, von dem Halbmesser kaum zu unterscheiden.

Zus. 4. Im zweiten Quadranten ist der Sinus des Bogens AF, der Perpendikel FO, sein Cosinus also CO, indem er also von o anfängt, nimmt er mit den Bogen zu, so, daß wenn dieser 180° wird, jener = r ist. Bei den Bogen des dritten und vierten Quadranten, verhält es sich mit dem Wachsen und Abnehmen des Cosinus wieder, wie im ersten und zweiten, aber alles gehet in umgekehrter Ordnung vor. Es ist demnach, wenn r den Halbmesser ausdruckt, $\cos 0 = r$, $\cos 90° = 0$, $\cos 180° = r$. Setzt man also den Halbkreis $= \pi$ und $r = 1$; so ist $\cos 0\pi = 1$, $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$; $\cos \pi = 1$. Ist also ein Bogen nicht $>$ 180° und sein Cosinus = o, muß muß der Bogen 90°, ist aber sein Cosinus 1 und der Bogen nicht $>$ 180°, so muß derselbe o oder 180° seyn.

§. 5. Betrachtet man noch die Sinus und Cosinus der Bogen, deren Endpunkte in einen der vier Quadranten fallen, in welche der Kreis durch die beiden Durchmesser AH und KL zerfället wird, in Hinsicht ihrer Richtung und Lage, so wird man bald einsehen, wie sich die gedachten Linien in dieser Hinsicht unterscheiden. Im ersten Quadranten wurden die Sinus der Bogen, deren Endpunkte in dem durch ABKFH gehenden Halbkreise liegen, auf den Durch-

messer AH, also in einer Richtung von K nach AH senkrecht herabgezogen. Im dritten und vierten aber nehmen sie in Bezug auf denselben Durchmesser die entgegengesetzte Richtung von L nach AH an. Gibt man also den Sinus im ersten Quadranten AK das Vorzeichen (+), so müssen die Sinus im zweiten Quadranten dasselbe; im dritten und vierten aber das entgegengesetzte Vorzeichen (—) erhalten. — Die Cosinus im ersten und vierten Quadranten, werden vom Mittelpunkte C aus, nach A genommen und liegen also sämmtlich auf der einen Seite des Durchmessers KL, alle in der Richtung von A nach C; die Cosinus im zweiten und dritten Quadranten, rechnet man von H nach C und sie liegen auf der andern Seite des Durchmessers KL, sämmtlich in der Richtung von H nach C, welche der vorigen von A nach C entgegengesetzt ist. Gibt man nun den Cosinus des ersten Quadranten, wie bei den Sinus, das Vorzeichen (+); so müssen die Cosinus im zweiten und dritten Quadranten, das Vorzeichen (—), im vierten aber wieder (+) erhalten.

Zus. Es ist demnach, wenn $r = 1$ gesetzt wird, $\sin 0\,\pi = 0$; $\sin \frac{1}{2}\pi = 0$; $\sin \pi = 0$; $\sin \frac{3}{2}\pi = -1$; $\sin 2\pi = 0$ nnd $\cos 0\,\pi = 1$; $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$; $\cos \pi = -1$; $\cos \frac{3}{2}\pi = -0$; $\cos 2\pi = 1$.

§. 6. Nimmt man nun in dem Kreise AKHL den

Punkt A zum Anfangspunkte an, so kann man in demselben von A nach L durch ꝛc. gehen; man kann aber auch in der Richtung durch L, H ꝛc. in demselben fortgehen. Daher ist dieser Bogen dem vorigen entgegengesetzt und erhält das Vorzeichen (—), wenn jener durch das Vorzeichen (+) bezeichnet wird. Kommt nun noch dazu, daß der Bogen AQ so viel Grade als AB enthält, so ist nicht bloß AQ = AF, sondern AQ = — AF.

§. 7. Erkl. Unter dem Sinusversus oder Quersinus eines Bogens AB = α, versteht man denjenigen Theil des Halbmessers, der zwischen den Endpunkten A und D des Halbmessers und des Cosinus enthalten ist. Auf gleiche Art bezeichnet IK den Sinusversus des Bogens BK = ($90° - \alpha$); oder auch den Cosinusversus des Bogens AB, = α. Statt Sinusversus und Cosinusversus, schreibt man gemeiniglich sin. vers. und cos. vers. oder sin. v. und cos. v.

§. 8. Erkl. Wird eine an sich unbegrenzte gerade Linie senkrecht durch den Endpunkt A des Halbmessers AC, aus dem Mittelpunkte C aber durch des Bogens-Endpunkt B eine andere gerade Linie dergestalt gezogen, daß jene von dieser, in irgend einem Punkte E auf der einen oder andern Seite von AH geschnitten wird, so heißt die erstere AE die Tan-

gente, die andere CE aber die Secante des Bogens AB $= \alpha$ oder des von dem Bogen AB gemessenen Winkels am Mittelpunkte ACE. Der Bogen AB aber ist das Complement von BK. Daher sind AE und CE die Tangente und Secante des Complements BK, aus diesem Grund heißt AE die Cotangente von BK, wie CE die Cosecante von BK. Zur Abkürzung schreibt man die angeführten Ausdrücke tang α oder tg α, sec α, cot α, cosec α. Es ist also AE $=$ tang $\alpha =$ cot $(90° - \alpha)$, CE $=$ sec $\alpha =$ cosec $(90° - \alpha)$.

Ziehet man nun durch den Endpunkt K die MK, so, daß CKM $=$ R wird und durch B von C die gerade Linie CM, alles wie die beiden vorigen AK und CE, bis sie sich in M durchschneiden, so heißt MK die Tangente des Bogens BK und CM seine Secante. Auch hier aber ist, weil AB $+$ BK, 90° beträgt BK das Complement von AB. Daher heißt KM die Cotangente von AB $= \alpha$ und CM die Cosecante von AB $= \alpha$. Diese Ausdrücke schreibt man nun KN $=$ tang BK oder cot AB; CM $=$ sec BK $=$ cosec AB. Es ist demnach KM $=$ tang $(90 - \alpha) =$ cot α und CM $=$ sec $(90° - \alpha)$ $=$ cosec α.

§. 9. Die von (1—8) erklärten sich auf die Bogen und die dazu gehörigen Halbmesser beziehenden

Perpendikel, begreift man unter dem gemeinschaftlichen Namen der **trigonometrischen** Linien. Sie lassen sich auf folgende Art leicht übersehen.

Es ist nämlich, wenn man $ACB = \alpha$ annimmt:

1) $BD = \sin \alpha = \sin$ compl. $(90° - \alpha) = \cos (90° - \alpha)$

2) $AE = \text{tang}\ \alpha = \text{tang}$ compl. $(90° - \alpha) = \cot (90° - \alpha)$

3) $CE = \sec \alpha = \sec$ compl. $(90° - \alpha) = \text{cosec}\ (90° - \alpha)$

4) $AD = \sin v.\ \alpha = \sin v.$ compl. $(90° - \alpha) = \sin v.\ (90° - \alpha)$

5) $CD = \cos \alpha = \sin$ compl. $\alpha = \sin (90° - \alpha)$

6) $KM = \cot \alpha = \text{tang}$ compl. $\alpha = \text{tang}\ (90° - \alpha)$

7) $CM = \text{cosec}\ \alpha = \sec$ compl. $\alpha = \sec (90° - \alpha)$

8) $KG = \cos v.\ \alpha = \sin v.$ compl. $\alpha = \sin v.\ (90° - \alpha)$.

So ist also $\sin 25° = \cos (90° - 25) = \cos 65°$; $\cos 46° = \sin (90° - 46°) = \sin 44°$; $\text{tang}\ 36° = \cot (90° - 36°) = \cot 54°$; $\cot 24° = \text{tang}\ (90° - 24°) = \text{tang}\ 66°$; $\sec.\ 15° = \text{cosec}\ (90° - 15°) = \text{cosec}\ 75°$; $\text{cosec}\ 30° = \sec (90° - 30°) = \sec 60°$; $\sin v.\ 60° = \cos v.\ (90° - 60°) = \cos v.\ 30°$; $\cos v.\ 72° = \sin v.\ (90° - 72°) = \sin v.\ 18°$.

Betrachtet man nun die in (Fig. 1.) zu dem Bogen AB = α verzeichneten trigon. Linien, ohne auf den Sinusversus zu sehen, so wird man leicht finden, daß sie sämmtlich durch Seiten rechtwinkliger Dreiecke vorgestellt worden. Zeichnet man sich nun den Winkel α mit den gedachten dazugehörigen trig. Linien aus größern oder kleinern Halbmessern, so werden, wegen des beibehaltenen und des rechten Winkels, die respectiven Dreiecke einander ähnlich seyn und sich sämmtlich, wie die verschiedenen Halbmesser verhalten. Theilt man nun diese in eine gleiche Anzahl gleicher Theile, so werden diese Theile, beim größern Halbmesser größer, beim kleinern, kleiner ausfallen, es wird sich mit ihnen wie mit den Graden bei größern und kleinern Kreisen verhalten; und alle gleichnamige trigonom. Linien, welche sich auf denselben Winkel beziehen, werden eine gleiche Menge von Theilen erhalten. Aendert sich aber in den entworfenen Figuren der Winkel oder der ihn messende Bogen α; so ändern sich auch die dazugehörigen trigonom. Linien nach den oben angeführten Gesetzen, und es läßt sich hier schon übersehen, daß es für die Theorie und Ausübung keinen großen Nutzen haben werde, wenn man für jede Größe von α, von Grad zu Grad ꝛc., die Werthe der tri-

gonom. Linien in Zahlen und aus diesen wieder die Größe des Winkels anzugeben im Stande wäre.

Die mannigfaltigen Vortheile, die man sich mit so vielem Rechte von dieser Einrichtung versprach, veranlaßte die Mathematiker der vorigen Jahrhunderte vor Erfindung der Differenzialrechnung, diese Gedanken weiter zu verfolgen und aller Anstrengungen und Schwierigkeiten ungeachtet, unternahmen sie es, die trigonometrischen Linien auf einem äußerst mühsamen Wege durch alle Grade, Minuten ꝛc. eines Quadranten zu berechnen und die Resultate ihrer Bemühungen in Verzeichnisse zu bringen, die unter dem Namen der trigonometrischen Tafeln bekannt sind. Zu mehrerer Bequemlichkeit fügte man den Sinus, Cosinus ꝛc. die Logarithmen bei, deren Kenntniß und Gebrauch ich hier als bekannt voraussetze. In dem 1sten Th. u. in m. Einl. d. e. Gr. d. Analysis, ist die Lehre von den Logarithmen im XI. Abschn. S. 256. ꝛc. vorgetragen worden.

§. 10. Ein spitzer und ein stumpfer Winkel, welche so zusammengehören, daß die zwischen ihren Schenkeln mit demselben Halbmesser beschriebenen Kreisbogen 180° oder 360° betragen, oder um 180 von einander verschieden sind, haben gleiche Sinus u. Cosinus; nur sind in jenem Falle

die Sinus im vierten, die Cosinus im zweiten, und in diesem die beiden Sinus und Cosinus einander entgegengesetzt.

Bew. Es sey ACB $= \alpha$ und ACF $= \pi - \alpha$, wenn π einen Kreisbogen von 180° bezeichnet, so ist FCH auch $= \alpha$, und wegen der gleichen und ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke CBD und CFO, BD $=$ FO und CD $= -$ CO, d. i. $\sin \alpha = \sin (\pi - \alpha)$ und $\cos (\pi - \alpha) = - \cos \alpha$.

II. Ferner sey ACQ$= \pi + \alpha$, so ist HCQ$= \alpha$ und weil das rechtwinkl. $\triangle$ DBC $\cong$ CDQ ist, so ist BD $=$ QO und DC $=$ OC, aber QO $= -$ BD und OC $= -$ DC, d. h. es ist $\sin (\pi + \alpha) = - \sin \alpha$ und $\cos (\pi + \alpha) = + \cos \alpha$ (§. 4. Zus. 5.).

III.) Endlich sey AKR $= 2\pi - \alpha$; so ist ACR $= \alpha$ und weil das rechtw. $\triangle$ BCD $\cong$ RCD ist, so ist DR $= -$ DB und CD $=$ CD, d. h. es ist $\sin (2\pi - \alpha) = - \sin \alpha$ und $\cos (2\pi - \alpha) = \cos \alpha$.

Anm. Die Sinusverſ. und Cosinusverſ. sind sämmtlich bejaht, weil sie nie über 2 wachsen oder hinausgehen können.

b. Von der Berechnung der einfachen trigonomet. Linien.

§. 11. Aufg. Aus dem gegebenen Sinus eines Winkels α für den Halbmesser $= 1$, die

die übrigen trigonometrischen Linien zu finden.

Aufl. I. Die beiden lothrechten Seiten BD und CD des rechtwinkl. △ BCD, dessen Hypotenuse der Sinus totus $= 1$ ist, bilden den Sinus und Cosinus des Winkels α oder des Bogens, durch welchen der Winkel α gemessen wird. Es ist aber $BD^2 + DC^2 = BC^2$ (§.62. Zus. Nr. 2.) d. h. trigonometrisch ausgedruckt $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$; folglich ist $\cos\alpha^2 = 1 - \sin\alpha^2$ und daher $\cos\alpha = \sqrt{(1 - \sin\alpha^2)}$.

II. Aus der Aehnlichkeit der beiden rechtwinkl. Dreiecke AEC und DBC folgen die Proportionen 1) $AE : AC = BD : DC$ und 2) $EC : CA = BC : DC$. Druckt man nun diese Größen trigonom. aus, so ist $\tan\alpha : 1 = \sin\alpha : \cos\alpha$ und $\sec\alpha : 1 = 1 : \cos\alpha$ aus jener folgt, daß $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oder $= \frac{\sin\alpha}{\sqrt{(1 - \sin\alpha^2)}}$, aus dieser, daß $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ oder $= \sqrt{(1 + \tan\alpha^2)}$. Endlich ist $\cos\alpha = AC - DC$ oder $= AC + CO$ im 2ten Quadranten, d. h. es ist $\sin.\text{vers.}\,\alpha = 1 \mp \cos\alpha$.

III. Dieselben Schlüsse finden auch bei den rechtw. ähnlichen Dreiecken MKC und BGC Statt.

Daher ist $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{(1 - \cos\alpha^2)}}$; cosec $\alpha = \frac{1}{\sin a} = \sqrt{(1 + \text{cotg. } \alpha^2)}$ und cosin. vers. $\alpha = 1 - \sin \alpha$.

Anm. Bezeichnet α einen zusammengesetzten Bogen, so, daß $\alpha = b + y$ oder $b - y$ ist, so behalten die gefundenen Ausdrücke diese Form bei und es ist z. B. $\text{tang } (b \pm y) = \frac{(\sin b \pm y)}{(\cos b \pm y)}$; oder $\sec. (\pi - y) = \frac{1}{\cos (\pi - y)}$ ꝛc.

Zus. 1. Wäre der Cosinus von α gegeben, so fände man auf eine ähnliche Art den oben angeführten Ausdruck $\sin \alpha = \sqrt{(1 - \cos \alpha^2)}$ aus der Beschaffenheit des rechtwinkl. △ BCD (§. 62. Zus. 1. Nr. 3.)

Zus. 2. Aus dem algebr. Ausdruck $\text{tang } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ läßt sich nicht allein die Größe der Tangente durch den ganzen Umkreis, sondern auch das ihm zukommende Vorzeichen bestimmen. Wird u. a. $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, so ist $\text{tang } \alpha = \frac{\sin \frac{1}{2}\pi}{\cos \frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{0}$, indem der Divisor den kleinsten Werth erhalten hat, so ist der Quotient über jede Größe, die sich angeben läßt, hinausgegangen oder unendlich geworden. Daher ist $\frac{1}{0} = \infty$, ein Ausdruck, welcher (§. 40. Nr. 2.) aus

den ersten Vorstellungen unserer Erkenntnisse abgeleitet worden ist, und sich hier völlig rechtfertiget.

Zus. 3. Da tang. $\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ und $\frac{\cot \alpha}{1} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ist, so folgt hieraus, daß tang $\alpha : 1 = \sin \alpha : \cos \alpha$ und $1 : \cot \alpha = \sin \alpha : \cos \alpha$, folglich tang $\alpha : 1 = 1 : \text{cotg } \alpha$, also tang $\alpha = \frac{1}{\text{cotg } \alpha}$ sey.

Zus. 4. Da man bei dem Kreise den Punkt A zum Anfangspunkte angenommen hat, so kann man sich den beschreibenden Punkt in der Richtung von A durch B nach K, aber auch in der Richtung von A durch R nach H fortgehend denken. In diesem Sinne, sind die Bogen AB ... und AR .. einander entgegen gesetzt. Daher ist der Sinus des verneinten Bogens AR verneint, der Cosinus aber bejaht.

Zus. 5. Nimmt man nun an, daß die oben genannten und berechneten trigonom. Linien für einen andern Halbmesser an einem gleichen Winkel wären berechnet worden, so würden diese Linien —, mit Ausnahme des Quersinus, sich wie die Halbmesser der ungleichen Kreisbogen verhalten.

Beispiele. 1) Die Seite eines regulären Sechseckes ist dem Halbmesser gleich. Setzt man

diesen = 1, so ist der Sinus eines Bogens von 30° = $\frac{1}{2}$ (Zus. 3.); wie groß ist der Cosinus und Quersinus dieses Bogens? — Es ist cos 30° = $\sqrt{[1-(\sin 30°)^2]} = \sqrt{(1-\frac{1}{4})} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ = 1,73205080 : 2 = 0,8602540 und der Quers. = 0,1397959.

2) Wie groß ist der Cosinus von 45°? — In diesem Falle ist der Cosinus so groß, als der Sinus, folglich = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ = 1,4142136 : 2 = 0,7071068.

3) Wie groß ist der Sinus eines Bogens, dessen Cosinus $\frac{1}{3}$ = 0,333 . . beträgt? — Es ist sin α = $\sqrt{[1-(\frac{1}{3})^2]} = \sqrt{(1-\frac{1}{9})} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ = 1,4142 . . $\times \frac{2}{3}$ = 0,9428 . . .

4) Wie groß ist die Tangente eines Bogens von 60°, dessen Sinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$ und dessen Cosinus $\frac{1}{2}$ beträgt? — Es ist tang 60° = $\frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \frac{1}{2}\sqrt{3} : \frac{1}{2}$ = $\sqrt{3}$ = 1,7320508 . .

5) Wie groß ist die Cotangente eines Bogens von 30°, dessen Sinus $\frac{1}{2}$ und Cosinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$ beträgt? — Es ist cot 30° = $\frac{\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{1}{2}\sqrt{3} : \frac{1}{2}$ = $\sqrt{3}$ = 1,7320508 . . wie in (§. 4.) weil die Cotangente von 30° nichts anders ist, als die Tangente von 60°.

§. 12. Aufg. Aus dem gegebenen Cosinus eines Winkels α den Sinus und Cosinus seiner Hälfte zu finden.

Aufl. Es sey (Fig. 2.) mit dem Halbmesser AC = 1 der Halbkreis ABD beschrieben, aus C auf die von A nach B gezogene Sehne, eine bis an den Bogen AB in F verlängerte senkrechte Linie CKF herabgelassen, so wird dadurch die Sehne und der Bogen in 2 gleiche Theile getheilt (Geom. §. 73. Zus. 1.). Nun lasse man aus B die senkrechte Linie BG auf AD herab, so ist BG der gegebene Cosinus des W. α; BK = AK = $\sin \frac{1}{2} \alpha$; CK = $\cos \frac{1}{2} \alpha$ und es verhält sich AG : AB = AB : AD (§. 10. Zus. Nr. 1. Geom.), d. i.

$$1 - \cos \alpha : 2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha = 2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha : 2 \text{ oder}$$

$$1 - \cos \alpha : 2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha = \sin \tfrac{1}{2} \alpha : 1 \text{ folglich}$$

$$2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha^2 = 1 - \cos \alpha \text{ oder}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} \alpha^2 = \frac{1 - \cos \alpha}{2}; \text{ also}$$

$$\text{I.)} \sin \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos \alpha}{2}\right)}. \text{ Ferner ist}$$

GD : DB = DB : DA (§. 110. Zus. Nr. 3. Geom.)

$$1 + \cos \alpha : 2 \cos \tfrac{1}{2} = 2 \cos \tfrac{1}{2} \alpha : 2$$

$$= \cos \tfrac{1}{2} \alpha : 1$$

$$2 \cos \tfrac{1}{2} \alpha^2 = 1 + \cos \alpha \text{ und also}$$

$$\text{II.)} \cos \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos \alpha}{2}\right)}.$$

Zus. 1. Betrachtet man nun den halben Winkel als einen Ganzen, so wird der Ganze, der doppelte Winkel vom halben, d. h. setzt man $\frac{1}{2}\gamma = \beta$; so ist $\gamma = 2\beta$ und schreibt man diese Werthe in die obige Aufgabe, so ist

1) $\sin\beta = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos 2\beta}{2}\right)}$ und

2) $\cos\beta = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos 2\beta}{2}\right)}$.

Zus. 2. Es ist auch $\frac{\sin\beta^2}{\cos\beta^2} = \frac{1 - \cos 2\beta}{1 + \cos 2\beta} = \tang\beta^2$, folglich $\tang\beta = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos 2\beta}{1 + \cos 2\beta}\right)}$.

Anm. Eine ausführlichere Entwickelung der Trig. Funkt. findet man im Anh. m. sphr. Trig. S. 241—274.

c) **Von den trigonometrischen Linien zusammengesetzter Bogen.**

§. 13. Aufg. Aus den Sinus und Cosinus zweier Bogen, den Sinus und Cosinus der Summe beider Bogen zu finden.

Man kann sich von der Richtigkeit dieses Satzes, welcher die Gründe vieler trigon. Berechnungen enthält und von sehr ausgebreiteten Folgen ist, sehr leicht überzeugen, wenn man sich die Figur mit den zugehörigen Linien verzeichnet, selbige mit den ihnen zukommenden trigonom. Namen belegt und die be-

kannten und gesuchten Stücke gehörig von einander unterscheidet.

Sind demnach die Sinus und Cosinus der beiden Bogen A und B gegeben, so ist

I) $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ und

II) $\cos(A + B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$.

Es sey in (Fig. 3.) der Bogen DG mit dem Halbmesser DE = 1 beschrieben worden, ferner sey der eine Bogen DF = A, der andere FG = B, deren Sinus und Cosinus KF, LG, KE und LE gegeben sind; so wird DG die Summe von A und B, folglich GI und IE der gesuchte Sinus und Cosinus, aus den vorigen Stücken, zu bestimmen seyn. Endlich ziehe man des Beweises wegen LM und LO aus L senkrecht auf DE und GI, so wird man die gedachten Linien GI = GO + OI und IE = EM — IM auf folgende Art bestimmen können. Es ist nehmlich △GLO (§. 106. G.) ∽ GLH ∽ HIE wegen der rechten Winkel GLH und HIE und der gleichen Verticalwinkel bei H und △HIE ∽ LME. Also verhält sich

1) $EF : FK = EL : LM$ und 2) $EF : EK = GL : GO$

$1 : \sin A = \cos : B : LM$ $\quad$ $1 : \cos A = \sin B : GO$

$LM = \sin A \, . \, \cos B = OI$ $\quad$ $GO = \sin B \, . \, \cos A.$

Es ist aber $OI + OG = GI = \sin(A+B)$; folglich

$$\text{I)}\ \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

3) Verhält sich, weil $\triangle GLO \backsim LME \backsim EFK$ ist,

$EF : EK = EL : EM$ und $EF : FK = LG : LO$

$1 : \cos A = \cos B : EM$ $\quad$ $1 : \sin A = \sin B : LO$

$EM = \cos A \,.\, \cos B$ $\quad$ $LO = \sin A \,.\, \sin B.$

Es ist aber $EM - IM = IE = EM - LO = \cos(A+B)$ folglich

$$\text{II)}\ \cos(A+B) = \cos A \,.\, \cos B - \sin A \,.\, \sin B.$$

Betrachtet man nun B als einen negativen Bogen; so ist sein Sinus negativ und sein Cosinus positiv (§. 11. Zus. 4.). Hieraus folgt nun, daß

$$\text{III)}\ \sin(A-B) = \sin A \,.\, \cos B - \cos A \,.\, \sin B \text{ und}$$

$$\text{VI)}\ \cos(A-B) = \cos A \,.\, \cos B + \sin A \,.\, \sin B.$$

Anm. Aus diesen vier Grundformeln fließt eine große Menge anderer Lehren und Formeln, selbst die Sinus und Cosinus derjenigen Bogen nicht ausgeschlossen, welche Vielfache von einander sind. Daher sollen hier einige der merkwürdigsten Folgerungen, welche aus dem Hauptsatze unmittelbar entspringen, aufgezeichnet werden.

1. Zus. Setzt man in I) und II) $A = B$, so ist $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$ und $\cos 2A = \cos A^2 - \sin A^2$.

2. Zus. Aus dem oben erwiesenen Satze folgt nun, daß

1) $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A.\cos B$

2) $\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A.\sin B$

3) $\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A.\cos B$

4) $\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A.\sin B$

sey. Die erste und dritte dieser Gleichung entsteht durch die Addition und Subtraktion der bei (I und II) wie auch der bei (III und IV) angeführten Gleichungen. Die 3te durch die Addition der bei (III und IV), die 4te aber durch die Subtraction der bei (III) von der bei (IV).

3. Zus. Aus den im (Zus. 2.) gefundenen Gleichungen, lassen sich verschiedene andere ableiten. Und wenn man $A+B=\alpha$ und $A-B=\beta$, folglich $A = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $B=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ schreibt, so erhält man

1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

2) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{1}{2}(a+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

3) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

4) $\cos\beta-\cos\alpha=2\sin\frac{1}{2}(a+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

Dividirt man nun die erste Gleichung durch die andere, so erhält man

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

$$=\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta).\cot\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$ oder

$\sin\alpha + \sin\beta : \sin\alpha - \sin\beta = \text{tang}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta) : \text{tang}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ d. h. die Summe und Differenz der Sinus zweier Bogen, sind den Tangenten der halben Summe und Differenz derselben proportional.

§. 14. Aufg. Aus den Tangenten zweier Bogen, die Tangenten und Cotangenten der Summe und Differenz dieser Bogen zu berechnen.

1) Man bezeichne die beiden Bogen mit α und β, so ist $\text{tang}\,(\alpha+\beta) =$ 1) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ (§. 11 N. 2.) $=$

2) $\frac{\sin\alpha\,.\,\cos\beta + \cos\alpha\,.\,\sin\beta}{\cos\alpha\,.\,\cos\beta - \sin\alpha\,.\,\sin\beta}$ (§. 13.) $=$

3) $\frac{\frac{\sin\alpha\,.\,\cos\beta}{\cos\alpha\,.\,\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\,.\,\sin\beta}{\cos\alpha\,.\,\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\,.\,\cos\beta}{\cos\alpha\,.\,\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\,.\,\sin\beta}{\cos\alpha\,.\,\cos\beta}} =$ 4) $\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha\,.\,\sin\beta}{\cos\alpha\,.\,\cos\beta}} =$

5) $\frac{\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta}{1 - \text{tang}\,\alpha\,.\,\text{tang}\,\beta}$. Daß die Brüche bei 2 und 3 einander gleich gesetzt werden können, folgt daraus, weil Zähler und Nenner durch dieselbe Größe, nehmlich durch $\cos\alpha\,.\,\cos\beta$ dividirt worden sind. Aus dem Bruche bei 3) entsteht der Bruch bei 4) indem hier die im Zähler und Nenner einander aufhebenden Theile weggelassen sind.

II) Es ist $\cot\,(\alpha+\beta) = \frac{1}{\text{tang}\,(\alpha+\beta)} = \frac{1 - \text{tg}\,\alpha\,.\,\text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}$.

III) Ist $\tang(\alpha-\beta) = \frac{\tang\alpha - \tang\beta}{1+\tang\alpha . \tang\beta}$. Der Beweis wird vollkommen so wie bei (I) geführt.

IV) Es ist $\cot(\alpha-\beta) = \frac{1}{\tang(\alpha-\beta)} = \frac{1+\tang\alpha.\tang\beta}{\tang\alpha - \tang\beta}$.

Zus. Setzt man nun $\alpha = 45°$; so wird, weil $\tang 45° = 1$, die Gleichung bei (I) $\tang(45°+\beta) =$

$$\frac{1+\tang\beta}{1-\tang\beta} = \frac{1+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\cos\beta+\sin\beta}{\cos\beta-\sin\alpha}$$

II) $\tang(45°-\beta) = \frac{\cos\beta-\sin\beta}{\cos\beta-\sin\beta}$ nach dens. Reg.

III) $\cot(45°+\beta) = \frac{\cos\beta-\sin\beta}{\cos\beta+\sin\beta}$ und

VI) $\cot(45°-\beta) = \frac{\cos\beta+\sin\beta}{\cos\beta-\sin\beta}$.

II. Abschnitt.

a) Von der Auflösung der Aufgaben geradliniger Dreiecke überhaupt.

§. 15. Da an die Aufgaben geradliniger Dreiecke die Bedingung geknüpft ist, daß unter den bekannten Stücken, allemahl eine Seite seyn muß, so lassen sich die Fälle leicht angeben, welche bei der

Auflösung ebener geradlinigen Dreiecke Statt finden können. Aus den Winkeln allein kann man zwar nicht die Größe, wohl aber das Verhältniß derselben gegen die Seiten des Dreiecks bestimmen, und diese Bestimmung ist so wichtig, daß alle trigonometrische Untersuchungen über die Ausmessung der Dreiecke, selbst jene sinnreichen, dem ersten Anscheine nach, unmöglichen Aufgaben nicht ausgeschlossen, vermittelst welcher die unzugänglichen Entfernungen auf der Erde, die Größen und Entfernungen der Himmelskörper rc. berechnet werden können, lediglich auf diesen Satz gegründet sind. Die hier vorkommenden Fälle lassen sich auf folgende Weise unterscheiden. Die drei gegebenen Stücke sind

I) entweder Seiten und Winkel, oder

II) Seiten allein. In jenem Falle sind unter den gegebenen Stücken wieder

1) entweder eine Seite nebst zwei Winkeln; oder

2) ein Winkel nebst zweien Seiten enthalten. In diesem Falle kann der Winkel

a) einer der beiden gegebenen Seiten gegenüber; oder

b) er kann von denselben eingeschlossen seyn.

§. 16. In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel.

Es ist hier zu beweisen, daß sich (Fig. 4.) AB : BC = sin C : sin A verhält. — Man ziehe durch die drei Winkelspitzen A, B, C des Dreieckes den Kreis ABC. Aus seinem Mittelpunkte lasse man die bis an den Umfang in E und F verlängerten Perpendikel DE, DF, auf die Seiten AB, BC des △ herab; so sind die Seiten AB und BC zugleich Sehnen des Kreises, welche, wie die ihnen zugehörigen eben so bezeichneten Bogen, durch DE und DF halbirt werden (§. 66.). Zwei Seiten aber verhalten sich allemahl, wie ihre Hälften. Folglich ist $AB:BC = \frac{1}{2} AB : \frac{1}{2} BC$. Nun ist aber $\frac{1}{2}$ AB die halbe Sehne des Bogens AEB oder 2 EB, d. i. der Sinus des Bogens EB oder des von diesem Bogen EB gemessenen Winkels EDB = ACB = C (§. 129.), d. h. es ist $\frac{1}{2}$ AB = sin C (§. 3. Zus. 1.). So ist auch $\frac{1}{2}$ BC = sin A. Schreibt man nun diese Ausdrücke in die vorige Proportion, so erhält man

AB : BC = sin C : sin A Aus gleichen Gründ. ist
BC : AC = sin A : sin B, folglich auch

AB : AC = sin C : sin B.

Zus. 1. In jedem Dreieck, wie ABC, ist der Sinus eines Winkels A, allemahl so groß, als der Sinus der Summe der beiden andern Winkel B und C. Denn es B + C = 180° — A, folglich sin (B + C) = sin A (§. 10.).

b) Von der Auflösung ebener geradlinigen rechtwinkligen Dreiecke.

§. 17. Bei einem rechtwinkligen △ ABC (Fig. 5.) dürfen, weil der rechte Winkel bekannt ist, nur zwei Stücke, wovon aber wenigstens das eine, eine Seite seyn muß, gegeben seyn und mit Hülfe des angeführten Satzes kann man aus der Hypothenuse AB = c und einem der spitzen Winkel A, die beiden lothrechten Seiten BC = a und AC = b des rechtwinkligen △ berechnen; nur muß man bemerken, daß sin. tot. zur Erleichterung der Berechnung allemahl = 1 gesetzt wird. Es ist nämlich

I) $a = c \sin A$ und II) $b = c \cos A$. Es verhält sich
$a : c = \sin A : \sin.\ tot.$

Folglich I) $a = c \sin A$. So verhält sich auch
$b : c = \sin B : 1$. Es ist aber
$A + B = 90°$, folglich

$\sin B = \cos A$ (§. 4. Zus. 1.)

$b : c = \cos A : 1$

II) $b = c \cos A$,

Beisp. Wie groß sind die lothrechten Seiten a und c im rechtw. △ ABC, wenn die Hypotenuse c = 3914 und ∠A = 27°15′ beträgt? — Man

nehme für die Berechnung die erste der obigen Gleichungen, nach welcher $a = c \sin A$, oder mit Rücksicht auf den Halbmesser der Tafeln r, $= \frac{c \sin A}{r}$ ist. Davon ist die log. Gleichung $\log a = \log c + \log \sin A - 10$. Die Berechnung davon ist folgende: Es ist

$$\begin{aligned} \log.\ c = \log.\ 3914 &= 3{,}5926208 \\ \log \sin A = \log \sin 27^\circ 15' &= \underline{9{,}6607459} \\ &\ 13{,}2533667 \\ \log \sin.\text{tot}.\text{tab} &= \underline{10,\qquad\ } \\ \log a &= 3{,}2533667 = \end{aligned}$$

log 1792. Den Werth für b findet man aus der zweiten Gleichung, nach welcher $b = \frac{c . \cos A}{r}$ ist; oder es ist vermittelst der Logarithmen

$$\begin{aligned} \log c = \log 3914 &= 3{,}5926208 \\ \log \cos A = \log \cos 27^\circ 15' &= \underline{9{,}9489101} \\ &\ 13{,}5415309 \\ \log.\sin.\text{tot}.\text{tab} &= \underline{10,\qquad\ } \\ \log b &= 3{,}5415309 = \end{aligned}$$

log 3479,6 nahe.

Zus. 1. Wären in dem rechtw. △ ABC die beiden lothrechten Seiten BC = a und AC = b gegeben; so ließen sich hieraus die spitzen Winkel A und B berechnen, aus deren einem, schon der an-

dere bestimmt wird, weil ihre Summe 90° beträgt. Es ist aber tang $A = \frac{a}{b}$. Denn es verhält sich $b : a = \sin B : \sin A$. Nun ist aber $B = 90 - A$, folglich $\sin B = \sin 90° - A = \cos A$, daher ist $b : a = \cos A : \sin A$ oder $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\cos A} = \text{tang}\, A$. Auch ist $\frac{a}{b} = \cot B$, weil tang $A = \cot B$ ist.

Beisp. Wie groß ist der spitze Winkel A, wenn $a = 1748'$ und $b = 1675'$ beträgt? — Es ist tang $a = \frac{a}{b}$ oder $= \frac{a \,.\, \sin \,.\, tot}{b}$, oder vermittelst der Log. $\log \text{tang}\, A = r + \log a - \log b$. Man findet aber

$$\begin{aligned} \log \,.\, \sin \,.\, tot \,.\, tab &= 10, \\ \log a = \log 1748 &= \underline{3{,}2425414} \\ & 13{,}2425414 \\ \log b = \log 1675 &= \underline{3{,}2240148} \\ \log \text{tang}\, A &= 10{,}0185266 = \end{aligned}$$

log tang 46°,13, folglich $A = 46°13'$ und $B = 90° - 46°13' = 43°47'$.

3. Zus. Sind die Winkel in diesem △ sehr klein, so kann man, ohne merklichen Fehler, anstatt der trigonometrischen Linien, die Winkel selbst nehmen. In diesem Falle heißt die im Satze angeführte Proportion $AB : BC = C : A$.

4. Zus.

4. Zus. Den Flächeninhalt F eines rechtw. △ findet man 1) aus den beiden Catheten a und b, $= \frac{1}{2}ab$; 2) aus der Hypotenuse c und einer Cathete, $= \frac{1}{2}a\sqrt{(c^2 - a^2)}$; 3) aus einem der spitzen Winkel A und der Hypotenuse, $= \frac{1}{2}c^2 \sin A \cos A = \frac{1}{4}c^2 \sin 2A$ (§. 13. Zus. 1.), 4) aus einer der lothrechten Seiten b und dem anliegenden spitzen W. A, $= \frac{1}{2}b^2 \operatorname{tang} A$ $= \frac{1}{2}b^2 \operatorname{cotg} B$.

b) Von der Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks.

§. 18. Jedes rechtwinklige △ läßt sich als die Hälfte eines gleichschenkligen betrachten, worin die halbe Grundlinie durch die eine und der von der Spitze auf die Grundlinie gefällte Perpendikel, durch die andere lothrechte Seite, vorgestellt wird. Daher kann man aus den bekannten Verhältnissen rechtwinkliger Dreiecke, die Eigenschaften eines gleichschenkligen Dreiecks entwickeln. Es sey (Fig. 9.) das gleichschenklige △ACB, worin das rechtw. $\triangle ACG = \frac{1}{2}ACB$; $AG = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}b$; $AC = h$ und $ACG = \frac{1}{2}ACB = \frac{1}{2}\alpha$ ist, so findet man

1) $\sin ACG = \sin \frac{1}{2}\alpha = \frac{\frac{1}{2}b}{h} = \frac{b}{2h}$

2) $h = \frac{b}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha}$ und 3) $b = 2h \sin \frac{1}{2}\alpha$. Diese drei Größen, a, b und α stehen in einer solchen Verbin-

dung mit einander, daß man aus zweien allemahl die dritte finden kann. Sind demnach die Seiten des Dreiecks gegeben, so lassen sich daraus die Winkel und aus einem Winkel und einer Seite, läßt sich die andere, berechnen.

Beisp. Wie groß ist der $\angle \alpha$, wenn die Seite $AC = h = 128°$; $AG = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} b = 96°$ angenommen wird? — Hier ist $\sin ACG = \sin \frac{1}{2}\alpha = \frac{\frac{1}{2} b}{a}$ oder $\log \sin \frac{1}{2}\alpha = \log \frac{1}{2} b + r - \log a = \log 96 + 10 - \log 128$. Es ist aber

$$\log \tfrac{1}{2} b = \log 96 = 1{,}9822712$$
$$\log.\sin.\text{tot}.\text{tab}. = 10{,}0000000$$
$$11{,}9822712$$
$$\log h = \log 128 = 2{,}1072100$$
$$\log \tfrac{1}{2}\alpha = 9{,}8750612 = \log 48°35',$$

folglich $\alpha = 97°10'$ beinahe.

Anm. 1. Auf die Eigenschaften des gleichschenkligen Δ ABC gründet sich auch eine Methode, Winkel auf dem Papier zu messen — und auf dem Felde gemessene Winkel zu zeichnen, die sicherer ist, als das Verfahren vermittelst des gewöhnlichen oder des geradlinigen Transporteurs. — Einen vorgegebenen Winkel mißt man auf folgende Art: Man gibt beiden Schenkeln AC und BC eine Länge von 1000 gleichen Theilen, nach dem verjüngten Maßstabe. Dann mißt man den Abstand AB, nimmt dessen Hälfte und sucht aus den Sinustafeln, welche Ziffern mit dem für $\frac{1}{2}$AB gefunde-

nen Werthe übereinstimmen. Den, mit dieser Zahl zusammengehörigen Bogen, doppelt genommen, gibt die Größe des Winkels ACB an.

Zum Auftragen eines gemessenen Winkels, nimmt man die 4 oder 5 ersten Stellen von dessen Sinus doppelt, macht AC = 1000, beschreibt mit AC einen Kreisbogen, zeichnet die Länge der durch die drei ersten Ziffern bestimmten Sehne AB, nach dem verjüngten Maßstabe in den Kreisbogen, so wird BCA der verlangte Winkel seyn.

Anm. 2. In gleicher Absicht kann man sich des rechtwink. Δ CAG bedienen. Ist ACG der gegebene Winkel, so nehme man AC = 1000, lasse AG senkrecht auf CG herab, messe wie viel von den 1000 Theilen in AG enthalten sind, so ist diese Zahl die Größe des zum ACG gehörigen Sinus, durch welchen man den Winkel selbst findet. Es sey z. B. AG = 348; so ist der W. 20°20′—25′.

Soll man an C, einen Winkel von 24°28′ auftragen, so ziehe man durch A die AB, mache GC = 910, errichte aus C einen Perp. GA, mache GA = 414; ziehe AC, so wird ACG = 24°28′, AG sein Sinus und CG sein Cosinus seyn.

c) Von der Berechnung regulärer Polygone ꝛc.

§. 19. Die trigonometrischen Aufl. dieser Aufgaben geben nicht nur alle Vollständigkeit, sondern sie gewähren auch alle Genauigkeit, die in der Ausübung nur möglich und erreichbar ist. Ein Ingenieur oder Feldmesser kann demnach allen hierher

gehörigen Forderungen eine Genüge leisten, wenn er sich mit diesen einfachen Grundsätzen bekannt gemacht hat.

§. 20. Aufg. Aus der Anzahl der Seiten eines regulären Polygons und dem gegebenen Halbmesser r eines um dasselbe beschriebenen Kreises, die Seite b, den Umfang u und den Flächeninhalt f des Polygons zu berechnen.

Aufl. Man bezeichne den Centriwinkel mit $\alpha = \frac{360}{n}$ und den Polygonwinkel mit $\beta = 180 - \alpha$, so enthält der 18te §. die Entwickelung der hier zur Berechnung nöthigen Stücke. Denn es ist die Hälfte der gesuchten Seite AB = b, d. i. $AG = \frac{1}{2}b = AC \sin ACG = r \sin \frac{1}{2}\alpha$, folglich ist 1) $b = 2r \sin \frac{1}{2}\alpha$. Der Umfang des Polygons sey u, so ist 2) $u = nb = 2nr \sin \frac{1}{2}\alpha$. Endlich ist der Flächeninhalt des $\triangle ACB = AG \cdot CG = \frac{1}{2} br \sin \frac{1}{2}\beta$; oder $= r^2 \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta = r^2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha$ (§. 18.) $= \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha$; folglich der Flächeninhalt des Polygons 3) $f = n \triangle ACB = \frac{1}{2} nr^2 \sin \alpha$.

Zus. Man siehet hieraus, daß jede Größe in jeder Gleichung aus den übrigen berechnet werden kann. Aus 1, findet man z. B. $r = \frac{b}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{2} b \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\alpha$ oder $= \frac{1}{2} b \sec \frac{1}{2}\beta$; aus 3) ist r

$= \sqrt{\frac{2f}{n \sin \alpha}} = \sqrt{\left(\frac{2 f \cdot \operatorname{cosec} \alpha}{n}\right)}$. Aus 2) ist

$r = \frac{u}{2n \sin \frac{1}{2}\alpha} = \frac{u}{2n \cos \frac{1}{2}\beta}$.

Beisp. 1. Die äussere Polygonseite soll 90 Ruthen betragen, wie groß ist der Halbmesser einer Festung mit 19 Bollwerken? — Es ist $\frac{1}{2}\alpha = 9° 28' 25\frac{5}{19}''$; $\frac{1}{2}\beta = 80° 31' 34\frac{14}{19}''$ und es ist $\sec \frac{1}{2}\beta = 6{,}0755383$ und $r = 273{,}3992$.

Wenn demnach der Ingenieur den Halbmesser und den Centri- und Polygonwinkel einer regulären Figur berechnet hat, so kann er dieselben auf dem Felde abstecken, wenn er das Astrolabium in die Mitte stellt, die bewegliche Regel vom Nullpunkte bis an den andern Schenkel eines jeden Centriwinkels von $\frac{180°}{n}$ herumführt, die Richtungslinien einvisirt, absteckt und nachher die Halbmesser abmißt, wo alsdann die Verbindungslinien der Endpunkte derselben, die Seiten des Polygons zu einer regulären Festung abgeben.

2) Wie groß ist die Seite und der Umfang eines in einen Kreis gezeichneten regulären Polygons von eilf Seiten, wenn des Kreises Halbmesser 364 Fuß beträgt. — Hier ist die Seite $b = 2r \sin \frac{1}{2}\alpha$, der Umfang $u = 2nr \sin \frac{1}{2}\alpha$ oder $b = 2 . 364 . \sin 16° 41' 49\frac{1}{11}''$ und $u = 2 . 11 . 364 . \sin 16° 41'$

$49\frac{1}{11}''$ und sin $16^\circ\ 41'\ 49\frac{1}{11}'' = 0{,}2817326$ und b $205{,}101\ldots$ und $u = 2256{,}1146\ldots$

§. 22. Aufg. Aus dem gegebenen Halbmesser r eines Kreises und der Anzahl der Seiten n eines um denselben beschriebenen regulären Polygons, die Seite S, den Umfang U und den Flächeninhalt F des regulären Polygons zu berechnen.

Aufl. Man ziehe von des Kreises Mittelpunkt nach den Winkelpunkten des Polygones D und E die geraden Linien CD und CE, so ist der W. DCE $= \alpha = \frac{360^\circ}{n}$, folglich $DH = \frac{1}{2} S = r \tang \frac{1}{2}\alpha$ (§. 17. Zus. 3.) und also 1) $DE = S = 2r \tang \frac{1}{2}\alpha$, 2) $U = nS = 2nr \tang \frac{1}{2}\alpha$ und das $\triangle DCE = DH \cdot CH = r^2 \tang \frac{1}{2}\alpha$, folglich 3) $F = n \triangle DEC = nr^2 \tang \frac{1}{2}\alpha$.

Zus. 1. Aus diesen drei Gleichungen lassen sich dieselben Folgerungen ableiten, wie bei der vorigen Aufgabe. Es ist $r = \frac{\frac{1}{2}S}{\tang \frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{2} S \cotang \frac{1}{2}\alpha$ (§. 11. Zus. 3.) $\tang \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} S : r$, ferner $r = \frac{1}{2} U \cotang \frac{1}{2}\alpha : n$ und $r = \sqrt{\left(\frac{F \cotg \frac{1}{2}\alpha}{n}\right)}$.

2. Zus. Auch läßt sich leicht übersehen, daß aus der Größe und Anzahl der Seiten eines regu-

lären Polygons, dessen Flächeninhalt und umgekehrt aus diesem und der Anzahl der Seiten, deren Länge trigonometrisch gefunden werden kann.

§. 22. Auch die Messung unzugänglicher verticaler und horizontaler Entfernungen fordern, wenn sie mit Genauigkeit ausgeführt werden sollen, vielen Fleiß und viele Aufmerksamkeit. Diese Beschäftigung bleibt daher mit Recht der Trigonometrie vorbehalten. Die vornehmsten Fälle davon werden hier und nachher vorkommen, so wie die Theorie ihre Auflösung gestattet.

Aufg. Die Höhe eines Gegenstandes PR (Fig. 6.) durch Rechnung zu finden, wenn man auf der Horizontalfläche, worauf PR steht, in der Richtung von A nach R eine Grundlinie AR messen und den Gegenstand von A aus übersehen kann.

Aufl. Man messe die Länge der Stationslinie RA = CQ und setze diese = b, dann nehme man den ∠ PCQ = BCD und setze ihn α, so hat man im rechtw. △ PCQ die eine Cathete CQ und den an CQ liegenden spitzen ∠ α. Daraus ergiebt sich die Höhe PQ = b tang α (§. 17. Zus. 3.). Hierzu rechne man nun noch die Höhe des Instruments AC = QR, so hat man daraus die ganze Höhe PR = PQ + QR. Druckt man die gefundenen

Werthe für PQ = b tang α durch Logarithmen aus, so erhält man log PQ = log b + log tang α — 10.

Beisp. Wie groß ist die Höhe PR, wenn die gemessene Grundlinie b = 785′ und der ∠ α = 28°54′ gefunden worden ist? — Man hat alsdann log PQ = log 785 + log tg 28°54′ — 10. Es ist aber

$$\log 785 = 2{,}8948696$$
$$\log \text{tang } 28°54' = 9{,}7419624$$
$$12{,}6368320$$
$$10{,}$$
$$\log PQ = 2{,}6368320 =$$

log 433,34′, folglich PQ = 433,34, wozu für die Höhe des Instruments QR noch eine Größe von 3 — 4′ gesetzt werden muß.

Zus. Fällt der Schatten eines Gegenstandes auf die Horizontalfläche, so kann man aus dessen Länge und der Sonnenhöhe, die Höhe des Gegenstandes berechnen. Stellt in der (Fig. 5.) BC = a die gesuchte Höhe des Gegenstandes, der W. BAC die Höhe der Sonne über dem Horizont und AC = b der Länge des Schattens vor, wovon die beiden letzten Stücke gemessen sind; so ist auch hier BC = a = b . tang A, oder vermittelst der Logarithmen log a = log b + log tang A — 10.

Beisp. Wie groß ist die Höhe BC = a, wenn der W. A = 39° 32′ und die Schattenlänge

AC = b = 392° gefunden worden ist? — Es ist

$$\log b = \log 392 = 2{,}5932861$$
$$\log \text{tang} A = \log \text{tng}\, 39°32 = 9{,}9166192$$
$$12{,}5099053$$
$$10,$$
$$\log a = 2{,}5099053 = \log 323{,}52$$

beinahe, folglich ist a = 323,52.

§. 23. Aufg. Die Höhe eines Gegenstandes zu messen, wenn man auf der Horizontalfläche, worauf derselbe steht, wegen vorkommender Hindernisse, von keiner Seite die Standlinie bis an den Fuß des Gegenstandes fortsetzen kann.

Aufl. Wird man durch einen Fluß oder See, oder irgend ein anderes Hinderniß abgehalten, die Messung von A bis Q (Fig. 7.) vorzunehmen, so messe man sich nur einen Theil der geraden Linie DR, etwa DE als Grundlinie ab, nehme in A den W. PAQ, in B den W. PBQ, welcher den W. ABP zu 180° ergänzt; so hat man den W. APB = 180° — (PAB + PBA) und im △ ABP sind ausser der einen Seite b alle Winkel bekannt, woraus sich nun die Seite BP berechnen läßt. Denn setzt man DF = AB = b und bezeichnet man den W. BAP durch α, den W. ABP durch β; so ist APB = 180° — $(\alpha + \beta)$, folglich sin APB = sin $(\alpha + \beta)$ (§. 10.) und es verhält sich

PB : AB = sin BAP : sin APB (§. 16.) oder

PB : b = sin α : sin $(\alpha + \beta)$.

Folglich ist $PB = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$. Aus PB und dem W. PBQ $= \gamma$ findet man nun im rechtw. △PQB die Höhe PQ = PB.sin$(180 - \beta)$. Schreibt man nun hier anstatt PB den vorhin dafür gefundenen Werth, so erhält man $PQ = \frac{b \sin \alpha . \sin \gamma}{\sin (\alpha + \beta)}$ und PR = AD, = QR + $\frac{b \sin \alpha . \sin \gamma}{\sin (\alpha + \beta)}$.

Beisp. Wie groß ist die Höhe PR, wenn b = 870°, der ∠ α = 15°38′, der ∠ γ = 28°16, gefunden worden ist und die Höhe des Instruments 4′ beträgt? — Hier ist also PR = 4′ + $\frac{872° \sin 15° 38' . \sin 28° 16'}{\sin 12° 38'}$ oder vermittelst der Logarithmen ist PQ = log 872° + log sin 15° 38′ + sin log 28°16′ — (10 + log sin 43°54′). Man findet aber log b = log 872° = 2,9405165

log sin α = log sin 15° 38′ =	9,4305267
log sin γ = log sin 28°16′ =	9,6753896
	22,0464328
	10,0000000
log sin $(\alpha + \beta)$ = log sin 12° 38′ =	9,3398706
	19,3398706
log PQ =	2,7065622 =

log 508,81°, folglich PR = 508,81° + 4′ = 509,21°.

Anm. 1. In Hinsicht dieser Aufgaben ist folgendes zu bemerken. Die Theorie kennt bei der Auflösung derselben keine Schwierigkeit, allein in der Ausübung hat man stets darauf zu sehen, daß bei der vorgenommenen Messung die Winkel die gehörige Schärfe erhalten und nicht zu spitz oder zu stumpf ausfallen. Am besten lassen sich die Fehler bei den Winkeln gleichseitiger oder auch solcher Dreiecke vermeiden, bei welchen die gesuchte Seite, so groß als die Standlinie ist, oder wo die beiden Winkel an der Standlinie einander gleich sind. Ich weiß, die Wahl dieser Linien und Winkel hängt nicht von unserer Willkür, sondern von den mannigfaltigen Umständen ab, durch welche der bei der Vermessung einzuschlagende Weg, gleichsam vorgeschrieben wird. Allein mancherlei Hindernisse lassen sich durch eine zweckmäßige Benuzung der Umstände vermeiden, und es ist ausgemacht, daß die Winkel desto unzuverlässiger werden, je mehr man sich dabei von den obigen Vorschriften entfernt. Kleine Winkel aber lassen allemahl die Zuverlässigkeit der daraus hergeleiteten Angaben bezweifeln, so sehr man auch mit ihrer Genauigkeit prahlen mag. Auch muß man es bei entscheidenden Messungen, wo möglich, nie unterlassen, ausser den zwei gemessenen Winkeln, auch den dritten durch wirkliche Messung anzugeben.

Damit nun die zu messenden Winkel in den angeführten Aufgaben nicht zu klein ausfallen, so muß man 1) darauf sehen, daß man sich nicht zu weit von dem Gegenstande, dessen Höhe bestimmt werden soll, ent-

ferne und 2) daß man sich nicht eine zu kleine Standlinie abmesse. Reicht alle Vorsicht nicht zu, gar zu kleine Winkel zu vermeiden, so bediene man sich lieber einer der allgemeinern Methoden, die in den folgenden Aufgaben vorgetragen werden sollen.

2) Man kann in der obigen Aufgabe bequemer (§. 23.) den Ergänzungswinkel von B zu 180° als den unmittelbar gemessenen Winkel in Rechnung bringen. Setzt man diesen $= \gamma$, so ist $APB = \gamma - \alpha$ und für die Größe PR erhält man alsdann den Ausdruck $= \frac{b \sin \alpha \sin \gamma}{\sin (\gamma - \alpha)}$ wo in den Zähler γ anstatt β und in den Nenner $(\gamma - \alpha)$ auch in den Werth von QR gesetzt worden ist. Muß man, wie in dieser Aufgabe, das Winkelinstrument an zwei Stationspunkten aufstellen, so muß man dasselbe, wenn es nicht etwa die bekannte sehr zweckmäßige Einrichtung des Smeatonschen Fußes hat, an beiden Punkten so viel wie möglich in gleicher Höhe stellen; indeß hat eine kleine Abweichung keinen merklichen Einfluß auf die daraus abzuleitende Resultate.

§. 24. Wenn die Erdfläche nicht horizontal ist und der Boden am Beobachtungsorte der Stationslinie sich gleichförmig erhebt oder senkt, so können unter diesen Umständen die beiden vorigen Fälle eintreten, daß man auf dem geneigten Boden entweder die ganze Stationslinie oder nur einen Theil derselben messen kann. Das eine Fernrohr wird horizontal gestellt und im ersten Falle am Anfange der Sta-

tionslinie, dann die Erhöhungs- und Vertiefungswinkel α und β gemessen. Der Winkel α wird durch die horizontale Visirlinie durchs Fernrohr und durch die Visirlinie nach dem Gipfel des Gegenstandes gebildet. Daher ist der Winkel, den diese Linie mit der Verticallinie des Gegenstandes einschließt, der Ergänzungswinkel von α zu 90°. Ist daher die gemessene Stationslinie b, so findet man die Höhe des Gegenstandes $H = \frac{b . \sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha}$. Liegt aber der Stationspunkt, wo die Winkel α und β beobachtet werden, tiefer als der Fußpunkt des Gegenstandes, so ist $H = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}$. Im zweiten Falle muß man am Ende der Stationslinie noch den Erhöhungswinkel y messen und alsdann ist $H = \frac{b \sin(\alpha \pm \beta) \sin(y \pm \beta)}{\sin(y - \beta) \cos \beta}$

Die obern Zeichen werden genommen, wenn der Fußpunkt tiefer, die untern, wenn er höher als der Beobachtungsort liegt.

Anm. Man kann sich der Tafeln auch zur Messung der Winkel bedienen. Soll man z. B. den W. ACB (Fig. 2.) bestimmen, so messe man sich die Schenkel AC und BC von beliebiger aber gleicher Länge ab, nehme alsdann die Entfernung AB und betrachte die Hälfte dieser Sehne AB, d. i. AK als den Sinus des W. ACF. Nun schlage man in den Tafeln den zu diesem Sinus

gehörigen Bogen AF für den Halbm. = 1 nach, der doppelte Werth desselben gibt den Bogen AB, durch welchen der W. ACB gemessen wird. Es sey z. B. AC = BC = 70 F; die Sehne 82,6 F, folglich ist für der Halbmesser = 1, AB = $\frac{82,6}{70}$ = 1,18 und AB = 1,18 : 2 = 0,590 = sin $\frac{1}{2}$ ACB = sin ACF = sin 36°9′ +; folglich ist ACB = 72°18′ + . . Ist der Winkel stumpf, wie ACF (Fig. 1.), so errichte man in C eine senkrechte gerade Linie CK von beliebiger Länge, aus K messe man den Perpendikel KN, so ist für den Halbmesser = 1, tang KCN = $\frac{KN}{KC}$. Wäre z. B. KN = 36,5 und CK = 50′, so ist tang KCN = $\frac{36,5}{50}$ = 0,730 . . = tang 36° 7′ + . . folglich ist ACF = 90° + 36° 7′ + = 126° 7′ +

§. 25. Augf. Die Aufgabe (§. 80. Geom.) aufzulösen, so daß die Halbmesser der beiden Kreise durch Rechnung bestimmt werden.

Aufl. Man zeichne an A und B der Seite AB die Winkel DBA = DAB = α und an A und C der Seite AC die Winkel EAC = ECA = β. Anstatt dessen, daß nun die senkrechten Linien durch A und B der Linien AD und BD, wie auch durch A und C der Linien AE und CE gezogen werden sollen, um durch deren Durchschnittspunkt die Halbmesser der beiden Kreise zu bestimmen, so kann man selbige durch folgende einfache Rechnung aus den Ta-

feln bestimmen. Es ist der Winkel DBF = DAF = R, der Winkel DBA = DAB = α, beides nach der Zeichnung, also ist R − α = ABF = BAF = φ. Ferner ist $\frac{1}{2}$ AB = BF cos φ = r cos φ, folglich r = AF = BF = $\frac{\frac{1}{2}AB}{\cos\varphi}$ = $\frac{1}{2}$ AB sec φ. Eben so erhält man r′ = AG = $\frac{\frac{1}{2}AC}{\cos\psi}$ = $\frac{1}{2}$ AC sec ψ, wenn EAC = ψ ist. Nun kann man die Länge der Halbmesser aus den Tafeln nehmen, auf dem verjüngten Maßstabe abmessen und dadurch die Mittelpunkte beider Kreise weit richtiger als durch bloße Zeichnung bestimmen.

§. 26. Aufg. Aus dem Unterschiede der beiden Halbmesser, welche von der Axe bis zu den äussersten Punkten, der Kopf und Bodenfriesen einer Kanone genommen werden und dem Abstande der Visirpunkte auf den Friesen, auf der Axe gemessen, den Erhöhungswinkel des Visirschusses zu finden, wenn die Visirlinie eine horizontale Lage hat.

Es sey der Halbmesser der Kopffriese (Fig. 8.) AE = r, der Bodenfriese DB = ϱ, der Abstand der Visirpunkte auf der Axe = a, so ist die gegebene Differenz r − ϱ und der gesuchte Erhöhungs-

winkel α = DEF = ACE = GDE; folglich tg α $= r' . \frac{r - \varrho}{a}$, wenn r' den Halbmesser der Tafeln bezeichnet. Nimmt man die Logarithmen, so findet man log $(r - \varrho) + 10 - \log a = \log \text{tang } \alpha$.

Anm. Soll der Erhöhungswinkel für irgend einen Zollaufsatz gefunden werden, so darf man nur die Höhe desselben h, zu der Differenz der Halbmesser addiren, und man erhält alsdann tang $\alpha = r' . \frac{h + (r - \varrho)}{a}$. Man vergleiche Leonhardi's ebene Trigon. §. 15. Nr. 2. und 3, Vega's Vorlesungen d. eben. Trig. §. 560. der 4ten Aufl.

d) Von der Auflösung ebener schiefwinkliger Dreiecke.

§. 27. Aufg. Zwei Winkel nebst einer Seite eines Dreiecks sind in Zahlen gegeben; man soll den dritten Winkel und die beiden übrigen Seiten durch Rechnung finden.

Es sey (Fig. 10.) ABC das Dreieck, dessen Seite AB = c, und dessen Winkel A und B bekannt sind, so ergibt sich aus diesen Stücken der Aufgabe zugleich die Größe des dritten Winkels C = 180° — (A + B). Daher kennt man, ausser der Größe der gegebenen Seite und den beiden gedachten Winkeln, den dritten, der bekannten Seite gegenüberlie-

denden Winkel. Daher lassen sich nach (§. 16.) zwei Proportionen dergestalt anordnen, daß in jeder, die eine der gesuchten Seiten, das vierte Proportionalglied wird. Sucht man nun einen Winkel, so fängt man die Prop. mit einer Seite an, sucht man aber eine Seite, so fängt man die Prop. mit einem Winkel an. Es verhält sich demnach im △ ABC,

sin C : c = sin A : a und

sin C : c = sin B : b, folglich ist

I) $a = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C}$ und

II) $b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C}$.

Beisp. Im △ ABC sind nach Vorschrift der obigen Aufgabe eine Seite und zwei Winkel gegeben, nehmlich $c = 648°$, $\angle A = 53°38'$ und $\angle B = 61°25'$; wie groß sind die übrigen Stücke des gedachten △ ABC? — Es ist $\angle C = 180° - (53°38' + 61°25') = 180° - 115°3' = 64°57'$. Druckt man nun die bei (I und II) gefundenen Gleichungen durch die Logarithmen der gegebenen Zahlen aus, so hat man

I) $\log a = \log 648 + \log \sin 53°25' - \log \sin 64°57'$ und

II) $\log b = \log 648 = \log \sin 61°25' - \log \sin 64°57'$.

Die weitere Berechnung beider Gleichungen steht nun so:

I) $\log 648 = 2{,}8115750$ II) $\log 648 = 2{,}8115750$

$\lg\sin 53°38' = 9{,}9059247$ $\lg\sin 61°25' = 9{,}9435549$

$12{,}7174997$ $12{,}7551299$

$\lg\sin 64°57' = 9{,}9570988$ $\lg\sin 64°57' = 9{,}9570988$

$\log a = 2{,}7604009$ $\log b = 2{,}7980311$

$= \log 575{,}9$ also $= \log 628{,}1$

$a = 575{,}9.$ folglich $b = 628{,}1.$

§. 28. **Aufg. Aus einer Seite und den beiden an derselben anliegenden Winkeln, den Flächeninhalt des $\triangle$ ACB zu berechnen.**

Aufl. Mit Beibehaltung der obigen Bezeichnung nehme man die gegebene Seite b zur Grundlinie an, so ist (Fig. 10.) der Flächeninhalt $F = \frac{1}{2} b \,.\, BD$. Es ist aber $BD = c \sin A$ (§. 17. I.), folglich $F = \frac{1}{2} b c \sin A$. Hier ist c zwar nicht gegeben, allein es läßt sich nach (§. 16.) aus den gegebenen Stücken leicht ableiten, es ist $c : b = \sin C : \sin B$, folglich $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$; also $F = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B}$. Wäre z. B. $b = 239$ Fuß, $A = 48°32'$, $C = 28°46'$, so ist $B = 180° - (48°32' + 28°46') = 102°42'$ und $\log b^2 = 2 \log b$. Daher ist

$$2 \log 239 = 4{,}7567958$$
$$\log \sin 48^\circ 32' = 9{,}8746795$$
$$\log \sin 28^\circ 46 = 9{,}6823651$$
$$24{,}3138404$$
$$210 + \log 2 = 10{,}3010300$$
$$\log \sin 77^\circ = 9{,}9892427$$
$$\log 4{,}0235777 =$$

10557,90 + Q. F.

§. 29. Um die Anwendung des 26. §. auf einen besondern Fall zu zeigen, so wollen wir die oben in der Geometrie vorgetragene Aufgabe hier durch Rechnung auflösen. Man nehme an, AC (Fig. 10.) sey ein Theil einer zu messenden Standlinie, von welcher man, aus A und C einen entlegenen Gegenstand in B, etwa einen Grenzbaum, eine Mühle ꝛc. sehen kann; man fragt, wie weit B von A und C entfernt sey?

Ist AC = b ein Stück einer Standlinie; so nehme man bei deren wirklichen Messung, die Winkel in A und C und berechne nach (§. 16.) die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten, so werden die gefundenen Zahlen, die gesuchten Entfernungen ausdrucken. Es ist nehmlich $BC = \frac{b \cdot \sin C}{\sin (A + C)}$ und $AB = \frac{b \cdot \sin C}{\sin (A + C)}$, wo $\sin (A + C) = \sin B$ ist (§. 10.)

Beisp. Wie weit ist B von A und C entfernt, wenn die gemessene Linie $AC = b = 1436{,}27'$ der W. $A = 25°36'37''$ und der W. $C = 81°45'$, folglich $AFC = 72°38'23''$ gefunden worden ist? — Nimmt man von den obigen Ausdrücken die log. Gleichung, so ist $\log BC = \log b + \log \sin A - \log \sin (A + C)$ und $\log AB = \log b - \log \sin C + \log \sin (A + C)$. Es ist aber

1) $\log b = 3{,}1572360$	und 2) $\log b = 3{,}1572360$
$\log \sin A = 9{,}6357325$	$\log \sin C = 9{,}9954822$
$12{,}7929685$	$13{,}1527182$
$\lg \sin (A+B) = 9{,}9797915$	$\lg \sin (A+C) = 9{,}9797915$
$\log BC = 28132163$	$\log AB = 3{,}1729660$
$= \log 650{,}45'$	$= \log 1489{,}2'$
folgl. $BC = 650{,}45'$	folgl. $AB = 1489{,}2'$

Anm. Man sieht wie man auf eine ähnliche Art die Entfernungen AE, AF, CE, CF aus der Standlinie und den aus A und C genommenen Winkeln CAE, CAF, ECA, FCA ꝛc. berechnen und so die Weiten verschiedener Punkte rings um AC bestimmen kann. Wollte man bloß die Lage der Punkte C, E und F gegen AC angeben, so hätte man gar nicht nöthig, die Stationslinie zu messen.

Zus. Stellet AB die Breite eines Flusses vor, so messe man sich die Standlinie AC und die beiden Winkel BAC und BCA in A und C, so ist auch

der dritte bei B bekannt und es läßt sich daraus, wie vorher die Seite AB, berechnen. M. s. (Eb. G. §118 u. 19).

§. 30. Aufg. Aus einem Winkel und zweien Seiten, deren eine dem gedachten Winkel gegenüber liegt, die dritte Seite nebst den beiden übrigen Winkeln durch Rechnung zu finden.

Es sey (Fig. 10.) die Seite AB = c, BC = a, und der, der Seite a gegenüberliegende Winkel = A; so sucht man die Seite AC = b und die Winkel B und C. Nun kann man zur Aufl. dieser Aufgabe den Satz aus (§. 16.) unmittelbar anwenden, zu Folge dessen sich $a : c = \sin A : \sin C$ verhält, folglich ist I) $\sin C = \frac{c . \sin A}{a}$. Nun erhält man II) $\angle B = 180° - (A + B)$ und nach (§. 16.) verhält sich $\sin A : \sin B = a : b$, folglich ist III) $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$.

Anm. Dieses würde der Gang der Rechnung seyn, wenn der gegebene Winkel stumpf wäre, oder wenn man von ihm wüßte, daß er > C ist. Im entgegengesetzten Fall, wo man dieses nicht wüßte oder wo er > C wäre, wird diese Aufgabe unbestimmt seyn, d. h. die Auflösung gibt einen doppelten Werth und man weiß nicht, welcher von beiden derjenige ist, der eigentlich verlangt wird. Sind die beiden Seiten c und a und der W. A gegeben, so erhellet es schon aus Gründen der Geome=

trie, daß sich aus den Datis nicht allein das △ ABC (Fig. 10.), sondern auch das △ ABC′ verzeichnen läßt. Folglich bleibt es hier unentschieden, ob die Verzeichnung dieses oder jenes Dreieckes verlangt wurde.

Wollte man nun versuchen, ob nicht die Trigonometrie Hülfsmittel darböte, diese Zweideutigkeit zu heben, so würde man unfehlbar, wie oben geschehen, den Winkel C durch Rechnung zu bestimmen suchen. Nun ist zwar im △ ABC bei C ein spitzer W., im △ AC′B aber bei C′ ein stumpf. W., allein diese Winkel sind zwei einander zu 180° ergänzende Theile und solche Winkel haben einerlei Sinus (§. 10.). Daher läßt sich auch auf diesem Wege nicht erkennen, ob der stumpfe oder spitze Winkel genommen werden muß.

Auch gibt es noch einen andern Umstand, der bei der vorläufigen Prüfung, wie die gegebenen und gesuchten Stücke von einander abhangen, erwogen werden muß. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn die dem gegebenen W. A entgegengesetzte Seite a nicht nur $<$ c, d. h. als die bekannte an A anliegende Seite, sondern auch kleiner, als der aus B auf AC herabgelassene Perpendikel BD ist. Da aber dieser Perpendikel allemahl $= \frac{c \,.\, \sin A}{r}$ ist und dieser Ausdruck lauter bekannte Größen enthält, so läßt sich über den gedachten Punkt leicht entscheiden. Aus diesen Betrachtungen ergibt sich nun folgendes Resultat.

Ist die gegebene Seite $a = BC < \frac{BA \,.\, \sin A}{r}$, so ist die Aufgabe unmöglich; ist hingegen $BC > \frac{BA \,.\, \sin A}{r}$

und zugleich $BC < BA$, so ist die Aufgabe zwar möglich, aber unbestimmt; ist endlich $BC > BA$, so ist die Aufgabe möglich und bestimmt. Denn man weiß nun, daß der gesuchte Winkel kleiner, als der gegebene ist, weil der größern Seite BC, der größere Winkel gegenüber liegt. In diesen drei Fällen wird nehmlich angenommen, daß der gegebene Winkel A spitz und der Seite BC entgegengesetzt sey. Sollte man aber bei der Prüfung der gegebenen Seite, $BC = \frac{BA . \sin A}{r}$ gefunden haben, so wäre dieses ein Beweis, daß BC und BD zusammenfallen und das Dreieck ABC ein rechtwinkliges seyn müßte.

Die oben gedachte Zweideutigkeit des Winkels bei C, hat, so lange sie nicht gehoben ist, auch auf die Bestimmung des dritten Winkels B und der dritten Seite b allemahl Einfluß. Die Rechnung gibt nehmlich AC oder AC′, je nachdem der eine oder der andere Werth des Winkels bei C oder C′ gebraucht wird. In der Ausübung finden diese Schwierigkeiten nicht Statt, weil sich aus den damit verknüpften Umständen leicht beurtheilen läßt, ob der Winkel bei C spitz oder stumpf sey.

Beisp. Es sey in der obigen Aufgabe die Seite $a = 895°$, $c = 623°$ und der W. $A = 28° 12'$; wie groß sind die beiden übrigen Winkel B und C und die dritte Seite $AC = b$? — Man suche nun aus der bei (I) gefundenen Gleichung den W. C, so ist diese Gleichung $\sin C = \frac{c . \sin A}{a}$, durch Loga-

rithmen ausgedruckt $\log \sin C = \log c + \log \sin a - \log a$, deren Berechnung auf folgende Art zu stehen kommt. Es ist

$$\log c = \log 895 = 2{,}9518230$$
$$\log \sin A = \log \sin 28^\circ 12' = 9{,}6744485$$
$$12{,}6262715$$
$$\log a = \log 623 = 2{,}7944880$$
$$\log \sin C = 9{,}8317835.$$

Allein der Sinus dieses Log. gehört so wohl zum $\angle$ C von 42°45′ beinahe, als auch zu einem W. C′ von 137°15′. Nimmt man nun jenen Werth, so erhält der W. B aus (II) in der Aufl. eine Größe von 109°3′, im andern aber, wenn $C = 137^\circ 15'$ wird, eine Größe von 14°33′.

Diese Gleichung bei (III) $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$ ist durch Logarithmen ausgedruckt $\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A$. Es ist aber

$$\log a = \log 623 = 2{,}7944880$$
$$\log \sin B = \log \sin 70^\circ 57' = 9{,}9755394$$
$$12{,}7700274$$
$$\log \sin A = \log \sin 28^\circ 12' = 9{,}6744485$$
$$\log AC' = \log b = 3{,}0955789 = \log 1246$$

beinahe, folglich $b = 1246^\circ$. Nimmt man aber für den W. B den andern Werth, so ändert sich in der obigen Rechnung der $\angle$ B, folglich auch dessen Lo-

garithme und es ist

$$\log a = \log 623 = 2{,}7944880$$

$$\log \sin B = \log \sin 14°33' = \underline{9{,}4000625}$$

$$12'1945505$$

$$\log \sin A = \log \sin 28°12' = \underline{9{,}6745485}$$

$$\log AC' = \log b' = 2{,}5201020 = \log 331{,}2,$$

folglich ist $AC' = b' = 331$. Ist aber die Seite $a = 856°$, $c = 428°$ und der W. $A = 39°46'$, so findet nach den oben gemachten Bemerkungen keine Zweideutigkeit Statt und die Berechnung dieses Beispiels vermittelst der Logarithmen ist folgende. Es ist die Gleichung bei (I) $\log \sin C = \log c + \log \sin A - \log a$, oder nach den gegebenen Zahlen $\log \sin C = \log 428 + \log \sin 39°46' - \log 856$. Man findet aber

$$\log c = \log 428 = 2{,}6314438$$

$$\log \sin A = \log \sin 39°46' = \underline{9{,}8059510}$$

$$12{,}4373948$$

$$\log a = \log 856 = \underline{2{,}9324738}$$

$$\log \sin C = 9{,}5049210 = \log \sin$$

$18°39'$ beinahe, folglich $C = 18°39$. Nun ist aus (II) $B = 180° = (A + C) = 180° - 58°25' = 121°35'$ und $\sin 121°35 = \sin 58°25'$ (§. 10.).

Die Gleichung bei (III) $b = \frac{a \,.\, \sin B}{\sin A}$ ist, durch Logarithmen ausgedruckt, $\log b = \log a + \log \sin 58°25' - \log \sin 39°46'$. Man findet aber

$$\log a = \log 856 = 2{,}9324738$$

$$\log \sin B = \log \sin 58^\circ\, 25' = 9{,}9303781$$

$$12{,}8628519$$

$$\log \sin A = \log \sin 39^\circ 46 = 9{,}8059510$$

$$\log b = 3{,}0569009 = \log 1139,$$

beinahe, folglich $b = 1139$.

§. 31. Aufg. Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines Dreieckes, die dritte Seite nebst den beiden andern Winkeln zu finden.

Im △ ABC (Fig. 10.) sind die Seiten b, c und der W. A gegeben und aus diesen Stücken sucht man die beiden übrigen Winkel B und C und die dritte Seite $a = BC$. Nach (§. 16.) verhält sich $b : c = \sin B : \sin C$, hieraus folgt

$$b + c : b - c = \sin B + \sin C : \sin B - \sin C;$$

$$\sin B + \sin C : \sin B - \sin C = tg\, \tfrac{1}{2}(B + C) : tg\, \tfrac{1}{2}(B - C)$$

Also ist $b + c : b - c = tg\, \tfrac{1}{2}(B + C) : tg\, \tfrac{1}{2}(B - C)$.

Aus den drei ersten bekannten Gliedern dieser Proportion findet man demnach das vierte, d. i. $\tfrac{1}{2}(B + C)$. Es ist aber $\tfrac{1}{2}(A + B) = \frac{180^\circ - A}{2} = 90^\circ - \tfrac{1}{2}A$. Daher ist $\tan \tfrac{1}{2}(B + C) = \tan(90^\circ - \tfrac{1}{2}A) = \cot \tfrac{1}{2}A$ (§. 8). Setzt man nun diesen Werth anstatt $\tan \tfrac{1}{2}(B + C)$ in die obige Proportion, so

erhält man $b + c : b - c = \cot \frac{1}{2} A : \tang \frac{1}{2} (B - C.)$ Aus der halben Summe und Differenz dieser beiden Winkel, findet man durch deren Addition nach bek. Gr. den größern Winkel B, und durch deren Subtraktion den kleinern A. Kennt man nun die Winkel, so kann man die dritte Seite a durch die Anwendung des Satzes (§. 16) leicht berechnen.

Beisp. Wie groß sind im △ ABC die beiden Winkel B und C nebst der dritten Seite BC = a, wenn die Seite AB = c = 849°; AC = b = 1800° und der W. A = 56°32′ beträgt?

Nach den Vorschriften der Aufl. ist die Proportion, nach welcher sich $b + c : b - c = \cot \frac{1}{2} A : \tang \frac{1}{2} (B - C)$ verhält, d. h. durch die gegebenen Zahlen ausgedruckt

$$1800 + 849 : 1800 - 849 = \cot \tfrac{1}{2} (56°32') : \mathrm{tg} \tfrac{1}{2} (B - C)$$

oder $2649 : 951 = \cot \frac{1}{2} 28° 16' : \tang \frac{1}{2} (B - C).$

Folglich ist $\tang \frac{1}{2} (B - C) = \dfrac{951 . \cot 28° 16'}{2649}$ oder durch Logarithmen ausgedruckt, ist $\log \tang \frac{1}{2} (B - C) = \log 951 + \log \cot 28° 16' - \log 2649.$ Es ist aber

$$\log (b - c) = \log 951 = 2{,}9781805$$
$$\log \cot \tfrac{1}{2} A = \log \cot 28°16' = 10{,}2694646$$
$$13{,}2476451$$
$$\log (b + c) = \log 2649 = 3{,}4230820$$
$$\log \tang \tfrac{1}{2} (B - C) = 9{,}8245631 =$$

$\log \tan 33°43'$ beinahe, folglich $\frac{1}{2}(B-C) = 33°43'$. Nun war aber $\frac{1}{2}(B+C) = 61°44'$, folglich ist der größere W. $B = \frac{1}{2}(B+C) + \frac{1}{2}(B-C) = 61°44' + 33°43 = 95°27'$ und der kleinere $C = \frac{1}{2}(B+C) - \frac{1}{2}(B-C) = 61°44' - 33°43' = 28°1'$.

Aus diesen Winkeln kann man nun auch die Seite a berechnen und zwar aus der Proportion, nach welcher $\sin C : \sin A = c : a$, folglich ist $a = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C}$ oder durch Logarithmen ausgedruckt, ist $\log a = \log c + \log \sin A - \log \sin C$, oder nach den gegebenen und gefundenen Stücken $\log a = \log 849 + \log \sin 56°32' - \log 28°1'$. Es ist aber

$$\log c = \log 849 = 2{,}9289077$$
$$\log \sin A = \log \sin 56°32' = 9{,}9212737$$
$$12{,}8501814$$
$$\log \sin C = \log \sin 28°1' = 9{,}6718468$$
$$\log a = 3{,}1783346 =$$

$\log 1507{,}7$ nahe, folglich $a = BC = 1507{,}7$. Diese Seite würde auch gefunden seyn, wenn man anstatt des Winkels C und der Seite c, den W. B und die Seite b genommen und a auf dieselbe Art daraus hergeleitet hätte.

§. 32. Zuweilen wünscht man besonders in der Ausübung, nur die Seite aus den gegebenen Stücken zu

berechnen. In diesem Falle sey im $\triangle ABC$ (Fig. 10.) $AB = c$, $AC = b$ und $BAC = A$, so ist

$$BC^2 = BD^2 + DC^2$$
$$= c^2 \sin A^2 + (b - AD)^2$$
$$= c^2 \sin A^2 + b^2 - 2b . AD + AD^2$$
$$= c^2 \sin A^2 + b^2 - 2b \cos A + c^2 \cos A^2$$
$$= b^2 + c^2 \sin A^2 + c^2 \cos A^2 - 2b \cos A$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \text{ also}$$
$$BC = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \cos A)}.$$

Beisp. Wie groß ist die dritte Seite a, worin die beiden andern $b = 10$, $c = 16$ und der von b und c eingeschlossene W. A, 60° beträgt? — Ist $\angle A = 60°$, so ist $\cos A = \frac{1}{2}$, folglich $a = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \cos A)}$ in Zahlen, $= \sqrt{(100 + 256 - 2.10.16.\frac{1}{2})} = \sqrt{(356 - 160)} = \sqrt{196} = 14$.

Zus. 1. Wäre A ein stumpfer Winkel, so ist $AD = - c . \cos A$, folglich würde alsdann $a = \sqrt{(b^2 + c^2 + 2bc \cos A)}$ seyn.

Zus. 2. Wären die drei Seiten bekannt, so könnte man daraus die Winkel berechnen und es ist $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Zus. 3. Wäre $\cos A = 0$, so würde $\angle A = R$ und der Theil $2bc \cos A = 0$; folglich bliebe $a^2 = b^2 + c^2$.

4. Es ist $\tang C = \frac{BD}{DC} = \frac{c.\sin A}{b - AD} = \frac{c.\sin A}{b - c\cos A}$. Es ist aber $\cot C = \frac{1}{\tang C} = 1 : \frac{c.\sin A}{b - c.\cos A} = \frac{b - c\cos A}{c\sin A} = \frac{b}{c\sin A} - \cot A$.

Aus gleichen Gründen ist $\tang B = \frac{b\sin A}{c - b\cos A}$; also $\cot B = \frac{c - b\cos A}{b\sin A} = \frac{c}{b\sin A} - \cot A$. In diesen Ausdrücken wird das Vorzeichen +, wenn der Winkel größer als 90° ist. Auch ist es bei der Berechnung bequem, den Ausdruck für die Tangente von C und B durch c und b zu dividiren.

§. 33. Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines Dreiecks ABC, den Flächeninhalt desselben zu finden.

Aufl. Es ist (Fig. 10) des △ABC Flächeninhalt $F = \frac{1}{2} AC . BD = \frac{1}{2} b . BD$. Es ist aber $BD = c\sin A$ (§. 17.), folglich $F = \frac{1}{2} b c \sin A$. Ist daher $b = 1800$, $c = 849$ und $A = 56°32'$, so findet man $\log \frac{1}{2} b = \log 900 = 2{,}9542425$

$$\log c = \log 849 = 2{,}9289077$$
$$\log \sin 56°32' = 9{,}9212737$$
$$\overline{\log 5{,}8044239} =$$

log 637417, folglich das △ ABC = 637417 Q. F.

Anm. Wäre die Figur ein Parallelogramm, so würde die Berechnung nach dem Ausdruck $F = bc \sin A$ geschehen.

§. 34. Aufg. Die Entfernung zweier, durch Sümpfe, Moräste ꝛc. von einander getrennten Gegenstände aus einem dritten Standpunkte A, von welchem man nach den gedachten Gegenständen C, B sehen und messen kann, zu berechnen.

Es sey (Fig. 10.) der Standpunkt B, von welchem aus man nach A und C sehen und messen kann, und AC die gesuchte Entfernung; so ist dieselbe, wenn man $AB = c$, $BC = a$ und den W. ABC $= B$ gemessen hat, $= \sqrt{(a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B)}$ (§. 23. II.)

Beisp. Wie groß ist die Entfernung AC, wenn $a = 810'$, $c = 576'$ und der $\angle A = 46°8'$ gefunden worden ist? — Es ist demnach in Zahlen $AC = \sqrt{(810^2 + 576^2 - 2.810.576.\cos 46°8')} = \sqrt{(656100 + 331776 - 646635\,83)}$, indem $\cos 46°8' = 0{,}6929825$ ist, folglich $AC = \sqrt{341240{,}16} = 584{,}1'$.

Zus. Man kann aber auch erst die beiden übrigen Winkel bei A und C nach der Proportion $a + c : a - c = \text{tg}\,\tfrac{1}{2}B : \text{tg}\,\tfrac{1}{2}(A - C)$ (§. 32.), berechnen und nach deren Bestimmung aus (§. 16.) die verlangte Entfernung AC herleiten. Mit Beibehaltung der

im vorigen Beispiele aus der Messung, gefundenen Größen ist die angeführte Proportion in Zahlen $810 + 576 : 810 - 576 = \cot 23^\circ 4' : \tang \frac{1}{2}(A - C)$, oder $1386 : 234 = \cot 23^\circ 4' : \mathrm{tg}\, \frac{1}{2}(A - C)$. Man findet aber

$$
\begin{aligned}
1)\ \cot 23^\circ 4' &= 10{,}3707447 \\
\log 234 &= \underline{\ 2{,}3692159\ } \\
&\ 12{,}7399606 \\
\log 1386 &= \underline{\ 3{,}1417632\ } \\
\log \tang \tfrac{1}{2}(A-C) &= \ 9{,}5981974 \\
&= \log 27^\circ 37,
\end{aligned}
$$

folglich $\frac{1}{2}(A - C = 21^\circ 37'$, also $A = 88^\circ 33'$ und $C = 45^\circ 19'$.

Nun ist 2) $\sin A : \sin B = a : AC$ und $AC = \frac{a . \sin B}{\sin A}$. Es ist aber

$$
\begin{aligned}
\log 810 &= \ 2{,}9084850 \\
\log \sin 46^\circ 8' &= \underline{\ 9{,}8579078\ } \\
&\ 12{,}7663928 \\
\log \sin 88^\circ 33' &= \underline{\ 9{,}9998609\ } \\
\log AC &= \ 2{,}7665319 =
\end{aligned}
$$

$\log 584{,}16$, folglich $AC = 584{,}16$.

§. 35. **Aufg.** Aus den drei Seiten eines Dreieckes, die Winkel durch Rechnung zu finden.

Es sey ABC (Fig. 11.) das Dreieck mit den gegebenen Seiten $AB = c$, $BC = b$, $AC = b$, so

so sollen daraus die Winkel A, B und C gefunden werden.

I) Man beschreibe aus der Spitze, des der größten Seite gegenüberliegenden W., mit der kleinsten Seite BC einen Kreis, welcher in der Entfernung von BC durch die Punkte C, E und F läuft und also die Seiten AB = c und AC = b in E und F durchschneidet. Nun verhält sich, wenn man AB bis an den Umfang in G verlängert, AC : AG = AF : AE. Dann lasse man aus B die BD senkrecht auf AC herab, so wird CE als eine Sehne des vorher beschriebenen Kreises durch BD halbirt und ABC in zwei rechtwinklige Dreiecke BDA und BDC zerfällt. Nach der Verzeichn. ist BG = BF = BC = a, folglich AG = AB + BC = c + a und AF = AB — BF = AB — BC = c — a. Schreibt man nun diese Ausdrücke in die obige Proportion an die Stelle der Glieder AF und AG; so erhält man $b : c + a = c - a : AE$ und hieraus $AE = \frac{c + a \,.\, c - a}{b} = \frac{c^2 - a^2}{b}$. Durch AE hat man nun auch die Sehne EC = AC — AE, folglich auch $ED = DC = \frac{1}{2}EC$ und AD = AE + ED gefunden.

Sind nun die gedachten Stücke berechnet, so kann man daraus die Winkel A und C herleiten.

Es ist nehmlich $\cos A = \frac{AD}{AB}$, $\cos C = \frac{CD}{CB}$ und $B = 180 - (A + C)$.

Beisp. Es sey $a = 116°$, $b = 280°$ und $c = 230°$, wie groß sind die Winkel A, B und C? — Hieraus erhält man $c + a = 346$, $c - a = 114$, folglich ist $AE = \frac{346 \times 114}{280} = 140{,}87$, also $EC = 280 - 140{,}87 = 139{,}12$, $ED = DC = \frac{1}{2} EC = 69{,}56$ und $AD = 140{,}87 + 69{,}56 = 210{,}43$. Folglich ist $\cos A = \frac{210{,}43}{116}$ und $\cos C = \frac{69{,}56}{116}$; oder durch Logarithmen ist $\log \cos A = \log 210{,}43 + 10 - \log 230$ und $\log \cos C = \log 69{,}56 + 10 - \log 116$. Es ist aber

1) $\lg 210{,}43 = 2{,}3231077$ und 2) $\lg 69{,}56 = 1{,}8423596$

$\lg 210{,}43 = 2{,}3231077$	$\lg 69{,}56 = 1{,}8423596$
$10{,}$	$10{,}$
$12{,}3231077$	$11{,}8423596$
$\log 230 = 2{,}3617278$	$\log 116 = 2{,}0644580$
$\log \cos A = 9{,}9613799$	$\log \cos C = 9{,}7779016$
$= \lg 23°49'$ nahe	$= \lg 53°10'$ nahe,
folglich $A = 23°49'$	folglich $C = 53°'10$.

Also $B = 180° - (A + C) = 180° - (23°49' + 53°10') = 180° - 76°59' = 103°1'$.

II) Diese Aufgabe läßt sich auch auf folgende Art auflösen. Es ist aus (§. 32. Zus. 2.)

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Es ist aber

$\sin A = \sqrt{(1 - \cos A^2)} = \sqrt{(1 + \cos A)(1 - \cos A)}$.

Nun ist $1 + \cos A = 1 + \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) =$

$\frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc}$. Setzt man

nun $b + c = m$, folglich $(b + c)^2 = m^2$; so ist

$1 + \cos A = \frac{m^2 - a^2}{2bc} = \frac{m + a \,.\, m - a}{2bc}$. Schreibt

man aber $b + c$ wieder für m, so ist

$1 + \cos A = \frac{b + c + a \,.\, b + c - a}{2bc}$. Es ist aber auch

$1 - \cos A = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) =$

$\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}{2bc} =$

$\frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc}$.

Setzt man auch hier $b - c = n$, so ist

$1 - \cos A = \frac{a^2 - n^2}{2bc} = \frac{a + n \,.\, a - n}{2bc}$.

Schreibt man nun $b - c = n$, so ist

$1 - \cos A = \frac{a + b - c \,.\, a - b + c}{2bc}$, folglich ist

$1 + \cos A \,.\, 1 - \cos A =$

$\frac{a + b + c \,.\, a + b - c \,.\, a + c - b \,.\, b + c - a}{4b^2 c^2}$ und

$\sqrt{(1+\cos A \,.\, 1-\cos A)} = \sin A$. Also ist

$$\sin A = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2bc}$$

So findet man auch

$$\sin C = \frac{\sqrt{(a+b+c \,.\, a+b-c \,.\, a+c-b \,.\, b+c-a)}}{2ab}.$$

Setzt man nun $N = \sqrt{(a+b+c \,.\, a+b-c \,.\, a+c-b \,.\, b+c-a)}$, so ist die log. Gleichung des ersten Ausdruckes, nehmlich $\log \sin A = \frac{1}{2} \log N + 20 - (\log 2 + \log b + \log c)$ und des andern nehmlich $\log \sin C = \frac{1}{2} \log N + 20 - (\log 2 + \log a + \log b)$.

Beisp. Wie groß ist der Winkel A, wenn die Seite $a = 400°$, $b = 745°$ und $c = 680°$ gefunden worden ist? — Es ist $a+b+c = 1825$, $b+c-a = 1025$, $a+c-b = 335$ und $a+b-c = 465$. Man findet aber

$$\begin{aligned}
\log(a+b+c) &= \log 1825 = 3{,}2612629\\
\log(a+b-c) &= \log 465 = 2{,}6674530\\
\log(a+c-b) &= \log 335 = 2{,}5250448\\
\log(b+c-a) &= \log 1025 = 3{,}0107239\\
&\qquad\qquad\quad 11{,}4644846\\
&\qquad\qquad\quad 20{,}0000000\\
&\qquad\qquad 2)\ 31{,}4644846\\
&\qquad\qquad\quad 15{,}7322423\\
\log 2 &= 0{,}3010300\\
\log b = \log 745 &= 2{,}8721563
\end{aligned}$$

$$\log c = \log 680 = 2{,}8325089$$
$$\log 2 + \log b + \log c = 6{,}0056952$$
$$\log \sin A = 9{,}7265471 = \log \sin$$
32°11′ beinahe, folglich ist der W. A = 32°11′.

So findet man auch sin C und sin B, wenn man, wie unten folget, von den gefundenen Logarithmen des Zählers den Log. von 2ab und 2ac abzieht und den Sinus dieser Logarithmen aus den Tafeln nimmt.

	15,7322423		15,7322423
log 2 =	0,3010300	log 2 =	0,3010300
log 680 =	2,8325089	log 680 =	2,8721563
log 400 =	2,6020600	log 400 =	2,6020600
	5,7355989		5,7752463
=	9,9966434	=	9,9569960
= log sin	82°53′ +	log sin	64°55′ +

Zus. Wird in einem gleichschenkligen Dreiecke der Winkel an der Spitze gesucht, so sind die beiden Schenkel b und c einander gleich, d. i. b = c, folglich ist alsdann $\sin A = \frac{\sqrt{(2b+a).(2b-a)a^2)}}{2b^2}$

$$= \frac{a\sqrt{(2b+a.2b-a)}}{2b^2} = \frac{a\sqrt{(4b^2-a^2)}}{2b^2}.$$

Anm. Ohne Anwendung der Logarithmen kann man den Winkel A auch aus dem obigen Ausdrucke $\cos A^2 = \frac{b^2+c^2-a}{2bc}$ berechnen; allein der vorher ge-

fundene Ausdruck gibt eine sehr einfache Formel, sowohl den Flächeninhalt der Dreiecke als der geradlinigen Figur aus ihren Umfangs- und Diagonallinien zu berechnen.

§. 36. **Aufg.** **Aus den drei Seiten eines Dreiecks, den Flächeninhalt F desselben zu berechnen.**

Aufl. Mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnung ist $F = \frac{1}{2} AC . BD = \frac{1}{2} b . BD = \frac{1}{2} bc \sin A$. Es ist aber sin A in der vorigen Aufg. (§. 35.) gefunden worden. Schreibt man nun diesen Werth in die vorige Gleichung, so findet man den verlangten Inhalt $F = \frac{1}{4} \sqrt{[(a+b+c).(b+c-a).(a+c-b).a+b-c)]}$.

§ 37. **Aufg.** **Die oben in der ebenen Geometrie (G. §. 117.) angeführte Aufgabe, nach welcher die Entfernung zweier Gegenstände, zu deren keinem man kommen kann, durch Zeichnung gefunden worden ist, hier durch Rechnung zu finden.**

Aufl. Man messe (Fig. 12.) die Grundlinie CD ab, welche man sich in Bezug auf die Gegenstände, von welchen man durch einen Fluß oder andere Hindernisse getrennt ist, so vortheilhaft wie möglich, wählt. In C nehme man den W. ACD und den größern der beiden W. ACB oder BCD; in D

nehme man den W. BDC und den größern der beiden andern BDA oder ADC, so kennt man auch allemahl den dritten. Auf diese Art sind in den beiden Dreiecken ACD und BCD alle drei W. nebst der gemessenen Seite CD bekannt. Nun berechne man daraus die Seiten AC und CB oder die Seiten DA und DB und aus diesen beiden Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel ACB oder ADB läßt sich die dritte Seite, welche den gesuchten Abstand bezeichnet, finden. Die Berechnung dieser Seite kommt auf folgende Art zu stehen. Es sey ACD $= C$, BCD $= \alpha$, BDC $= D$, ADC $= \beta$; so ist im $\triangle$ ACD der W. CAD $= \gamma = 180° - (C + \beta)$ und im $\triangle$ BCD, der W. CBD $= \delta = 180° - (D + \alpha)$. Demnach verhält sich im $\triangle$ CAD

$AC : b = \sin\beta : \sin\gamma$, folglich ist 1) $AC = \frac{b \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$

und im $\triangle$ CBD ist $BC : b = \sin D : \sin \delta$, folglich ist

2) $BC = \frac{b \cdot \sin D}{\sin\delta}$. Nun sind im $\triangle$ ACB außer den beiden Seiten AC und BC noch der eingeschlossene W. ACB $= (C - \alpha) = \varphi$ bekannt. Daraus erhält man 3) $AB = \sqrt{(CB^2 + CA^2 - 2BC \cdot CA \cos\varphi)}$ (§. 32.)

Beisp. Wie groß ist der Abstand AB, wenn $b = 986$, der W. $C = 98° 25'$, $\alpha = 39° 21$,

$D = 75°16'$, $\beta = 32°48'$, folglich $\gamma = 48°47'$, $\delta = 65°23$. Daher ist, wenn man die obigen 3 Ausdrücke berechnet

1) $\log b = 2,9938769$
$\log \sin \beta = 9,7337654$
$12,7276423$
$\log \sin \gamma = 9,8763468$
$\log AC = 2,8512955$
$= \log 710,0$
folgl. $AC = 710'$.

2) $\log b = 2,9938769$
$\log \sin D = 9,9854803$
$12,9793572$
$\log \sin \delta = 9,9586188$
$\log BC = 3,0207384$
$= \log 1048'$.
folgl. $BC = 1045'$.

3) $AB = \sqrt{(710^2 + 1048^2 - 2 \cdot 710 \cdot 1048 \cdot 0,5140404)} = \sqrt{(504100 + 1098304 - 762784,5495600)} = \sqrt{839619,450430} = 916.$

Zus. Aus der obigen Auflösung siehet man, wie man durch einen gegebenen Punkt C mit der unzugänglichen geraden Linie AB, eine Parallellinie ziehen kann. Hat man sich nach der vorigen Aufg. AB berechnet; so läßt sich auch der $\angle ABC = \lambda$ daraus bestimmen. Nun setze man an den Punkt C der BC einen Winkel, welcher $= \angle ABC$ ist, folglich läuft, wegen der dadurch entstandenen Wechselwinkel, der Schenkel CD des $\angle BCD$ parallel mit AB.

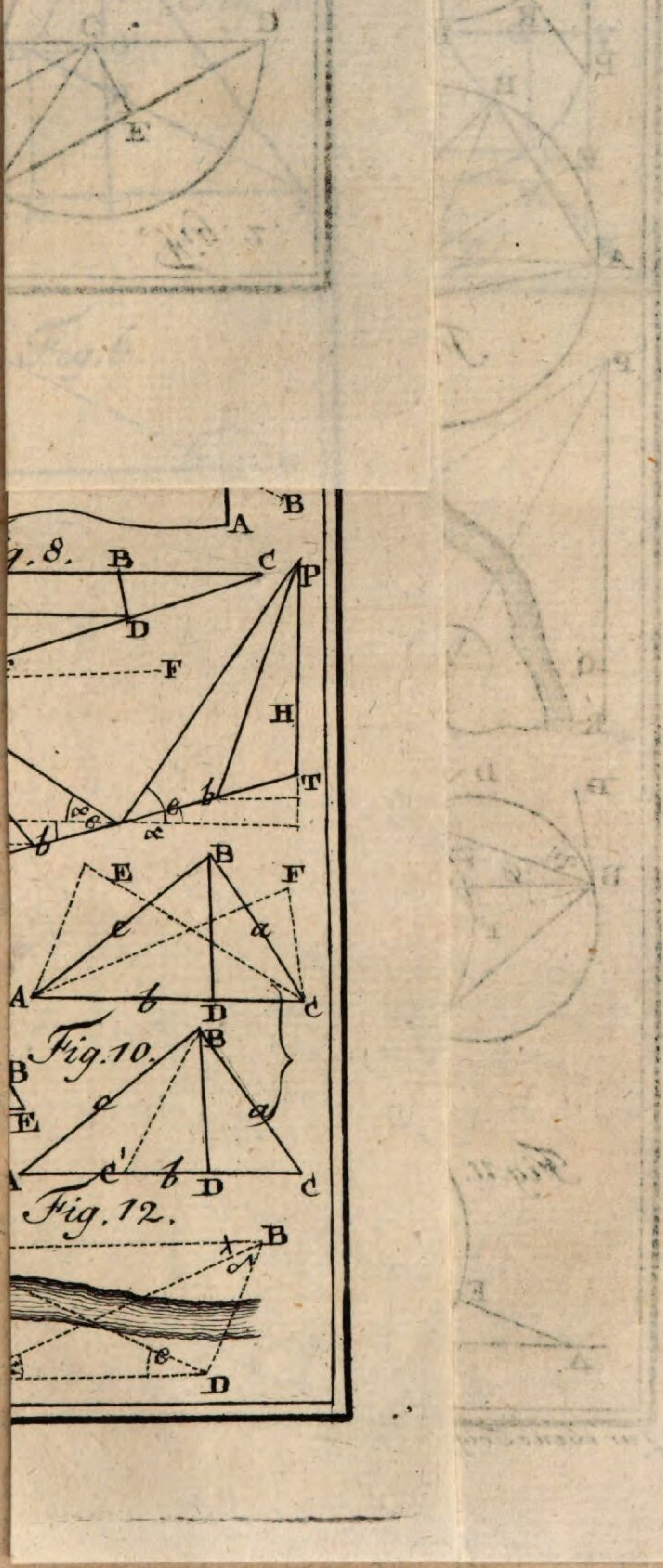


Fig. 8.
Fig. 10.
Fig. 12.

I. Abschnitt.

Von der Lage der Ebenen gegen einander und gegen gerade Linien.

§. 1. Man kann jede Ebene in jede Lage bringen. Nimmt man alsdann einige Punkte an, die in ihrer Lage bestimmt und unveränderlich sind, so kann man, nach den Vorstellungen, die man sich nach (Eb. G. §. 7.) von einer Ebene zu machen hat, selbige durch die gedachten Punkte allemahl fixiren, d. h. man kann der Ebene eine solche Lage, eine solche Stellung geben, daß sie dieselbe nicht verlassen kann, ohne daß sie die festliegenden Punkte verläßt. Da jede Ebene jede Lage annehmen kann, so kann man sie auch in eine solche Lage bringen, in welcher wenigstens einer von den festen Punkten in ihr befindlich ist. Dann aber läßt sich die Ebene nach allen Seiten und Richtungen wenden, ohne daß die Lage des Punktes in ihr geändert wird. Gibt es also ausser dem Punkte A (Fig. 2.) noch einen an-

dern festen Punkt B, so wird die Ebene bei den gedachten Veränderungen, auch bald diesen erreichen. Dann aber wird die ganze gerade Linie AB in diese Ebene fallen (§. 7. Eb. Geom.). Nun wird man die Ebene noch um die, zwischen beiden Punkten A und B liegende, gerade Linie AB wie um eine Axe drehen können, und gibt es ausser A und B noch einen dritten, mit den vorigen nicht in einer geraden Linie liegenden festen Punkt K, so wird die Ebene bei der Umdrehung auch an diesen kommen. So bald sie ihn aber erreicht hat, ist die Lage der Ebene fixirt. Die übrigen Punkte haben, sie mögen liegen, wo man will, auf die Bestimmung der Ebene in Hinsicht ihrer Lage keinen Einfluß. Daher wird die Lage einer Ebene durch drei, nicht in gerader Linie liegende, Punkte bestimmt.

Anm. Die Größe der Ebene kommt hierbei nicht in Betrachtung. Denn so wie man jede gerade Linie nach beiden Seiten ohne Ende verlängern kann, so gibt es auch für die Ebene auf keiner Seite eine Grenze, über welche hinaus man sie nicht erweitern könnte. So weit also auch die drei festgesetzten Punkte von einander entfernt seyn mögen, so wird durch das vorher beschriebene Verfahren, die Ebene allemahl eine solche Lage erhalten können, daß sie durch drei Punkte gehen muß. Legt man aber durch die drei Punkte noch eine zweite Ebene, so verhält es sich mit ihnen, wie mit zwei geraden Linien, die durch zwei Punkte gehen, sie

fallen zusammen, hören auf zwei verschiedene Ebenen zu seyn und bilden nur eine Ebene.

Aus diesen Betrachtungen folgt nun: a) daß zwei einander schneidende oder drei einander in drei Punkten treffende gerade Linien in einer Ebene liegen. b) Zwei verschiedene Ebenen ABC und ABD können außer der geraden Linie AB keinen Punkt weiter mit einander gemein haben. Also ist der Durchschnitt zweier Ebenen ellemahl eine gerade Linie. c) Verbindet man zwei auf verschiedenen Seiten einer Ebene liegende Punkte (Fig. 1.) B und C vermittelst einer geraden Linie BC, so wird sie von derselben in einem Punkte E durchschnitten, außer welchem sie mit der Ebene GK nichts gemein hat. Denn hätte sie nur noch einen zweiten Punkt gemein, so würde die Linie ganz in die Ebene fallen. Der angeführte Satz ist auch umgekehrt richtig.

§. 2. Erkl. Eine gerade Linie PQ (Fig. 98.) steht auf einer Ebene ABab senkrecht, wenn sie mit allen in dieser Ebene liegenden, und durch den Punkt P, worin sie dieselbe trifft, gezogenen geraden Linien Aa, Bb, Gg . . rechte Winkel einschließt. Bildet aber PQ nicht mit allen geraden Linien, die in der Ebene von ABab durch P möglich sind, rechte Winkel, so steht sie auf derselben schief.

§. 3. Lehrs. Eine gerade Linie PQ, welche mit zwei andern Aa, Bb, aus deren Durchschnittspunkt sie errichtet worden ist, rechte Winkel einschließt, steht auf der,

durch diese einander schneidenden geraden Linien, gelegten Ebene APB, senkrecht.

Bew. Des Beweises wegen ziehe man eine beliebige gerade Linie Gg durch P, mache AP=BP =aP=bP, verbinde A und B, wie auch a und b durch die geraden Linien AB und ab, endlich nehme man in PQ einen beliebigen Punkt Q an, und ziehe AQ, BQ, GQ, aQ, bQ, gQ, so erhellet die Congruenz folgender, durch die gezogenen Verbindungslinien in und über der Ebene ABab entstandenen Dreiecke. Es ist nehmlich

1) $\triangle APB \cong aPb$ (§. 26.)

2) $\triangle APG \cong aPg$ (§. 27.)

3) $\triangle APQ \cong aPQ$ (§. 26.)

4) $\triangle BPQ \cong bPQ$ (§. 26.)

5) $\triangle AQB \cong aQb$ (§. 28.)

6) $\triangle AGQ \cong aQg$ (§. 28.)

7) $\triangle GPQ \cong gPQ$ (§. 28.)

$$GPQ = gPQ = R$$

In diesem Beweise leitet man aus der Congruenz der beiden ersten, zugleich die Bestimmungs-

stücke der beiden folgenden Dreiecke her, und dieses kann man so weit fortsetzen, bis man auf das letzte Paar kommt. Aus der Congruenz dieser Dreiecke schließt man auf die Gleichheit der Winkel GPQ und gPQ, deren jeder einem rechten gleich ist. Daher steht PQ senkrecht auf Gg, und aus denselben Gründen auf jeder andern geraden Linie, die durch P in der Ebene ABP möglich ist, folglich auf der ganzen Ebene.

1. Zus. Also läßt sich aus einem in der Ebene liegenden Punkte, nur allemahl eine gerade Linie senkrecht errichten.

2. Zus. Auch kann aus einem Punkte über einer Ebene nur allemahl eine gerade Linie senkrecht auf dieselbe herabgelassen werden, welche die kürzeste zwischen der Ebene und dem Punkte ist.

3. Zus. Eine gerade Linie AB (Fig. 1.) kann nicht auf zwei einander schneidenden Ebenen GF und GK zugleich senkrecht stehen; denn sonst würde, wenn man von C nach D und von E nach D gerade Linien CD und ED zöge, DEC = EDC = R seyn, welches nicht möglich ist.

4. Zus. Stehet demnach eine gerade Linie auf zweien Ebenen senkrecht, so laufen sie mit einander parallel. Denn sie können sich nach (Zus. 3.) nicht schneiden; und Ebenen, die sich nicht schneiden kön-

nen, so viel man sie auch nach allen Seiten erweitern mag, laufen mit einander parallel.

§. 4. Wenn PQ auf PA, PB, PH senkrecht steht, so liegen die letztern drei Linien in einerlei Ebene. Denn läge PH nicht in diesen Ebenen, so müßte doch die Ebene APB von der gehörig erweiterten Ebene PQ in GPQ geschnitten werden, also wäre PQ senkrecht auf PG und zugleich auf PH, welches unmöglich ist.

§. 5. Die Neigung zweier sich schneidenden Ebenen ABC und ABD (Fig. 2.) gegen einander (ein Flächenwinkel) wird durch einen geradlinigen Winkel (den Neigungswinkel GHK bestimmt, welcher entsteht, wenn man durch einen beliebigen Punkt H der Durchschnittslinie AB beider Ebenen, zwei gerade Linien HG und HK so zieht, daß die eine HG in der einen, und die andere HK in der andern Ebene, auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitt AB senkrecht steht. Stellt man sich durch die drei Punkte GHK eine Ebene vor, so heißt diese, die Ebene des Neigungswinkels. Ist nun der W. GHK = R so stehen auch beide Ebenen ABC und ABD auf einander senkrecht, oder der Flächenwinkel ist ein rechter ꝛc.

Zus. Die Durchschnittslinie zweier schneiden-

den Ebenen ABC und ABD, steht auf der Ebene ihres Neigungswinkels senkrecht.

Anm. Die gleichförmige Ausdehnung des Flächenwinkels macht, daß man den Scheitelpunkt des ebenen geradlinigen Neigungswinkels an einer beliebigen Stelle der Durchschnittslinie annehmen kann. Es ist also ein geradliniger Winkel hinreichend, die Größe eines jeden Flächenwinkels zu bestimmen. Man pflegt einen Flächenwinkel durch vier Buchstaben CABD zu bezeichnen, deren beiden äusseren an die Ebenen und die beiden mittleren an die Durchschnittslinien gesetzt sind.

§. 6. Lehrs. Wenn eine gerade Linie AB (Fig. 3.) auf einer Ebene LM senkrecht steht, so ist jede andere durch AB gelegte Ebene, auf der Ebene LM senkrecht.

Bew. Man errichte aus B in LM auf dem Durchschnitte beider Ebenen auf EF, den Perpendikel BC, so ist ABC = R (§. 5.). Dieser aber ist der Neigungswinkel beider Ebenen, folglich stehen diese Ebenen auf einander senkrecht, indem auch ABF = R ist (§. 3.).

Zus. Zwei Ebenen (Fig. 1.) GF und GK, die einander in der geraden Linie GH schneiden, stehen auf der Ebene ihres Neigungswinkels CDE senkrecht.

§. 7. Lehrs. Wenn zwei Ebenen FD und LM (Fig. 3.) auf einander senkrecht

stehen, so ist die in einer derselben, auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt EF senkrecht herabgelassene gerade Linie AB, auch auf der andern LM senkrecht.

Bew. Beide Ebenen DF und LM stehen auf einander senkrecht; daher ist ihr Neigungswinkel ABC = R. Ferner steht AB senkrecht auf EF, also ist ABF = R, folglich ist AB senkrecht auf LM.

1. Zus. Steht die Ebene DF auf der LM senkrecht und errichtet man alsdann aus einem beliebigen Punkte B des gemeinschaftlichen Durchschnittes auf LM einen Perpendikel AB, so muß AB in der Ebene DF liegen. Denn läge AB nicht in DF, so könnte man in dieser Ebene, die gerade Linie AB auf den gemeinschafclichen Durchschnitt senkrecht herablassen. Alsdann hätte man durch B zwei gerade, auf LM senkrecht stehende Linien, welches nach (Zus. 1.) unmöglich ist.

2. Zus. Wenn (Fig. 4.) zwei gerade Linien AB und CD, deren eine AB auf der Ebene LM senkrecht steht, mit einander parallel laufen, so steht die andere CD, auch auf derselben senkrecht. Denn es ist AB der CD parallel, folglich liegen AB und CD in einerlei Ebene AD. Allein AD steht nach (§. 6.) senkrecht auf der Ebene LM. Ist nun AC der Durchschnitt beider Ebenen AD und LM, so ist

BAC=R, folglich ist auch ACD=R (Eb.G.§.20.N.5.), d. h. DC steht auf dem Durchschnitt beider Ebenen, also auch auf der Ebene LM senkrecht (§. 3.).

3. Zus. Zwei gerade Linien AB und CD, welche auf einer Ebene LM senkrecht stehen, laufen mit einander parallel. Denn wäre CD nicht der AB parallel, so könnte man durch C eine andere etwa CE mit AB parallel ziehen. Diese würde nach (Zus. 2.) auf LM senkrecht stehen. Also würden aus einem Punkte zwei gerade Linien CD und CE auf LM senkrecht stehen, welches nach (§. 3. Zus. 1.) nicht möglich ist.

4. Zus. Zwei gerade Linien, die mit einer dritten, mit ihnen nicht in einerlei Ebene liegenden, geraden Linie, parallel laufen, sind unter einander parallel. Denn es läßt sich zeigen, daß alle drei auf einer und eben derselben Ebene senkrecht stehen.

§. 8. Lehrs. Wenn zwei einander in AB (Fig. 5.) schneidende Ebenen auf einer dritten Ebene LM senkrecht stehen, so steht auch ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt AB, auf derselben senkrecht.

Bew. Man ziehe in der Ebene LM durch den Punkt A zwei gerade Linien KA und PA, deren eine auf CD, die andere auf FG senkrecht stehe. CD ist der Durchschnitt der Ebene CDE mit der

Ebene LM; wegen der ersten Constr. ist PAB, wegen der andern KAB=R (§. 7. Zus. 1.), folglich ist AB auf LM senkrecht.

§. 9. Lehrs. Zwei in verschiedenen Ebenen nach einerlei Seite liegende Winkel ABC und abc (Fig 6), deren Schenkel BA und ba, BC und bc mit einander parallel laufen, sind einander gleich.

Bew. Man mache BA=ba und BC=bc, so ist Aa = und ∥ Bb; Cc = und ∥ Bb (§. 52. Eb. G.), folglich ist AC=ac und also △ABC≌abc, daher ABC=abc.

Zus. Hieraus geht nun hervor, daß der Neigungswinkel zweier einander schneidenden Ebenen von gleicher Größe bleibt, in welchem Punkte des Durchschnittes man auch den Scheitelpunkt des Neigungswinkels annehmen mag.

§. 10. Aufg. Aus einem gegebenen Punkte A (Fig. 7.) über einer unbegrenzten Ebene LM, eine gerade Linie lothrecht auf dieselbe, herabzulassen.

Es sey A der gegebene Punkt, LM die verzeichnete Ebene, man soll von A, auf die Ebene LM eine gerade Linie senkrecht herablassen.

Aufl. Man zeichne in der Ebene LM eine beliebige gerade Linie FM und lasse von A auf FM

eine gerade Linie AB senkrecht herab (Eb. G. §. 34.). Ist nun A auf LM lothrecht, so ist das Verlangte geschehen. Ist dieses aber nicht, so errichte man aus B auf FM in der Ebene FE die auf FM senkrecht stehende Linie BC, lasse hierauf von A auf BC die senkrechte Linie AD herab, so wird AD auf LM senkrecht stehen.

Bew. Man ziehe durch D die LE der FM parallel, so ist FM senkrecht auf der Ebene ABD (§. 7. Zus. 2.), weil ABM = CBM = R ist. Folglich ist auch die zur FM ‡ gezogene Linie LE senkrecht auf ABD. Also ist LDA = LDB = R. Daher steht AD senkrecht auf LM (§. 2).

Zus. Ist ein Punkt G in der Ebene LM gegeben, aus welchem ein Perpendikel auf derselben errichtet werden soll, so darf man nur aus einem beliebigen Punkt A, eine gerade Linie AD auf LM senkrecht herablassen und alsdann durch den gegebenen Punkt G mit AD die Parallele GH ziehen.

§. 11. Erkl. Die Neigung einer geraden Linie AB (Fig 10.) gegen eine Ebene LM, wird durch den spitzen Winkel ABC bestimmt, welcher entsteht, wenn man aus einem beliebigen Punkte A der geraden Linie AB, auf LM einen Perpendikel AC herabläßt und hierauf B und C durch eine gerade Linie verbindet. ABC heißt alsdann der Neigungs-

winkel der geraden Linie AB gegen die Ebene LM.

§. 12. Wenn zwei Parallelebenen von einer dritten Ebene geschnitten werden, so laufen die Durchschnittslinien mit einander parallel und die nach einerlei Seite gerichteten Neigungswinkel der Parallelen gegen die schneidende Ebenen sind einander gleich.

Bew. 1. GH und KL (Fig. 8.) können nicht anders als in den Ebenen, in welchen sie liegen, zusammentreffen, welches der Annahme widerspricht.

2. Da GH der KL parallel ist, so wird die Linie MN des Neigungswinkels MNO gehörig verlängert, die Linie KL in P winkelrecht schneiden (Ebn. Geom. §. 20.). Die Ebene MNO aber wird gehörig erweitert, die Ebenen CD in PQ schneiden. Alsdann läuft NO mit PQ parallel nach (§. N. 1.) und es ist MNO=MPQ (Eb. G. §. 20. Nr. 1) ꝛc.

Zus. Wenn daher zwei gerade Linien von Parallelebenen geschnitten werden, so sind die ganzen Linien den abgeschnittenen Stücken proportional. Man ziehe BC (Fig. 9.), so sind die Durchschnittslinien der △ ABC und DBC parallel, folglich ist AE : AB = CG : CB = CF : CD.

§. 13. Wenn die Schenkel AB, ED und

BC, EF (Fig. 11.) zweier in verschiedenen Ebenen liegenden Winkel ABC und DEF mit einander parallel laufen, so sind die Ebenen GH und LM selbst parallel.

Bew. Aus E lasse man Ee nach (§. 10.) auf LM senkrecht herab, und ziehe durch e die ed der BA und ef der BC parallel, so ist AB der DE und BC der EF parallel (§. 7. 3. 4.). Daher ist deE + eED = 2R und feE + eEF = 2R (§. 20. Nr. 1.); allein nach der Verzeichnung ist deE = feE = R, folglich ist auch eED = eEF = R, also steht Ee senkrecht auf den beiden Ebenen GH und LM, und daher laufen diese Ebenen mit einander parallel.

§. 14. Erkl. Wenn von mehreren Ebenen BAC, BAD, DAC (Fig. 12.), welche sämmtlich an einen Punkt A, zusammengestellt sind, zwei und zwei sich einander schneiden, so wird der zwischen ihnen liegende, auf der entgegengesetzten Seite des Punktes A unbegrenzte Raum, eine körperliche Ecke genannt. Sind der Ebenen drei, so heißt sie ein körperliches Dreieck. Ueberhaupt wird jede Ecke, nach der Anzahl der, den Punkt A umschließenden Seitenflächen, benannt. Bei jeder körperlichen Ecke hat man, auf die ebenen und auf die Flächenwinkel zu sehen.

§. 15. Lehrs. Bei einem körperlichen

Dreieck ist die Summe zweier ebenen Winkel, wie man sie auch zusammen nehmen mag, allemahl größer, als der dritte.

Bew. Sind die drei ebenen Winkel BAC, BAD und DAC (F. 12) einander gleich, so ist der Satz von selbst klar. Ist dieses aber nicht, so sey BAC der größere. Nun setze man an A den W. BAE = BAD, mache AE = AD und ziehe aus B durch E nach C die gerade Linie BC, desgl. BD und DC, so ist wegen dieser Verzeichnung $\triangle$ BAE $\cong$ BAD, folglich ist BE = BD und BE + DC > BE + EC und DC > CE, folglich DAC > EAC (§. 47. Zus.) und so auch

BAD + DAC > BAE + EAC, d. i.

BAD + DAC > BAC

Zus. Wenn man zwei körperliche Dreiecke bei A und a aus drei ebenen Winkeln, welche von gleicher Größe und in beiden auf einerlei Art geordnet sind, zusammensetzt, so sind die gedachten Dreiecke gleich, und fallen, in einander gelegt, mit ihren Grenzen zusammen. Denn man lege beide körperliche Dreiecke nach einerlei Seite gekehrt, a auf A, den Schenkel ab des ebenen W. abc längs dem Schenkel AB des ebenen W. ABC, so fällt, weil bac = BAC ist, ac mit AC zusammen. Nun ist

der Flächenwinkel cabd = CABD; folglich fallen die Ebenen bad und BAD und wegen der gleichen W. bad und BAD, auch ad mit AD, zusammen. Es liegt also ad auf AD, nach dem obigen ac auf AC. Daher fällt auch die Ebene dac mit der Ebene DAC zusammen. Also sind die körperlichen Dreiecke bei a und A congruent und daher einander gleich.

§. 16. **Lehrs. Die Summe der, einen körperlichen Winkel bei A einschließenden ebenen Winkel ist, wenn sich darunter kein einwärts gehender befindet, kleiner als vier Rechte.**

Bew. Denn wenn man den körperlichen W. bei A (Fig. 13.) mit einer Ebene BCD durchschneidet, so ist (§. 15.)

$$\left.\begin{array}{l} d + e > BCD \\ f + g > CBD \\ h + k > BDC \end{array}\right\} \text{ also die 6 W.}$$

$$d + e + f + g + h + k > BCD + CBD + BDC > 2R$$
$$a + d + f + b + e + h + c + g + k = 6R$$

folgl. $a + b + c < 4R$, indem

$$a + (d + f) = 2R$$
$$b + (e + h) = 2R$$
$$c + (g + k) = 2R \text{ ist}$$

Daher ist die Summe der drei ebenen Winkel um A < 4R.

1. Zus. Wird der körperliche Winkel bei A (Fig. 14.) von drei, vier oder von einer beliebigen Anzahl ebener und auswärts gehenden Winkel begrenzt, so beträgt die Summe derselben dennoch weniger, als vier Rechte.

2. Zus. Sind BAC, CAD, DAB (Fig. 12.) drei gleichseitige Dreiecke, so ist a = b = c, und ihre Summe beträgt 180°. Würde aber A von 4, 5 oder 6 solchen ebenen Winkeln begrenzt, so betrüge ihre Summe 240°, 300° oder 360°. Im letzten Falle würden sie in einerlei Ebene liegen und könnten keinen körperlichen Winkel mehr bilden.

3. Zus. Gesetzt, die bei A oder a an einander gefügten drei Ebenen wären Quadrate und jeder von den drei Winkeln BAD, BDE und DAE oder die gleichnahmigen bad, bae und dae (Fig. 15) = R, so ist ihre Summe 270°; sollte aber noch ein vierter Winkel von gleicher Größe dazu kommen, so würden sie wieder in einerlei Ebene fallen und keinen körperlichen Winkel abgeben. Wären die drei Ebenen, reguläre Fünfecke und also jeder W. = 108°, so betrüge ihre Summe 324°, und es wäre nicht mög-

lich

lich, einen W. bei A aus vier solchen Figuren zusammen zu setzen.

II. Abschnitt.

Von den geometrischen Körpern.

a) Von den regulären Körpern.

§. 17. Erkl. Jeder Körper wird entweder von lauter ebenen, oder von lauter krummen, oder von ebenen und krummen Flächen zugleich, begrenzt. Körper der ersten Art heißen regulär oder irregulär, je nachdem die, sie als Seitenflächen begrenzenden Ebenen, alle gleiche, reguläre und unter gleichen Winkeln gegen einander geneigte, Polygone sind oder nicht.

§. 18. Reguläre Körper sind das Tetraedrum, welches von vier; das Octaedrum, welches von acht; das Icosaedrum, welches von zwanzig gleichen und gleichseitigen Dreiecken; das Hexaedrum, welches von sechs gleichen Quadraten; das Dodecaedrum, welches von zwölf gleichen und regulären Fünfecken begrenzt wird.

§. 19. Aehnliche Körper nennt man diejenigen, deren körperliche Winkel, in derselben Ord-

nung genommen, einander gleich sind, und welche von gleich vielen, ähnlichen, ebenen Figuren, als Seitenflächen begrenzt werden.

Zus. Also sind alle gleichnahmige reguläre Körper das Tetraedrum dem Tetr. rc. ähnlich.

§. 20. Lehrs. Es gibt nicht mehr als fünf reguläre Körper.

Bew. Die möglichen Verbindungen, gleicher ebener Winkel zur Bildung körperlicher Ecken läßt sich leicht erschöpfen, und dadurch die regulären Körper ihrer Zahl nach, genau bestimmen. Es läßt deren nur fünf. Denn aus ihrer Beschaffenheit folgt, daß ihre Seitenflächen ebene, gleiche und gleichseitige Dreiecke, oder gleiche Quadrate oder gleiche und reguläre Fünfecke sind.. Von gleichen und gleichseitigen Dreiecken kann ein körperlicher Winkel begrenzt werden, aber ihre Anzahl darf nicht unter drei und über fünf gehen, wie beim Tetraedrum, Octaedrum und Isocaedrum, nicht aber von mehreren (§. 16. Zus. 2.). Alsdann kann ein solcher Winkel noch von drei gleichen Quadraten und endlich von drei regulären Fünfecken begrenzt werden; jenes findet beim Hexaedrum, dieses beim Dodecaedrum Statt.

§. 21. Erkl. Netze geometrischer Körper (retia c. g.) sind Zeichnungen ihrer Oberflächen, die auf einer Ebene entworfen und so beschaffen sind, daß

sie, um die gehörigen Körper gelegt, selbige ohne die geringste Veränderung ihrer Theile aus ihrer natürlichen Lage, vollkommen einschließen und begrenzen.

§. 22. Aufg. Die Netze der fünf regulären Körper zu zeichnen.

1) Man beschreibe über ab (Fig. 16.) ein gleichseitiges △ abc, theile jede der drei Seiten bei d, e, f in zwei gleiche Theile, ziehe die geraden Linien de, ef, fd, so stellt die Figur das Netz des Tetraedrums dar.

2) Man beschreibe wie in (1) die Figur abc, verlängere ab bis bg = bf, desgleichen df bis fh = fg ist, ziehe gh, halbire fh und gh in k und l und ziehe bk, bl und kl, so stellt die ganze Figur das Netz des Octaedrums dar.

3) Man theile ab (Fig. 17.) in vier gleiche Theile, errichte in a die af senkrecht auf ab, ziehe fl mit ab, und cg, dh, ek, bl mit af parallel, verlängere cg und dh auf beiden Seiten, so daß gp = gc = cm und hd = hq = dn werde, ziehe pq und mn, so ergibt sich dadurch das Netz des Hexaedrums.

4) Man beschreibe ein gleichseitiges △ abc (Fig. 18.), verlängere ab, trage auf den verlängerten Theil ab viermal auf, d. i. mache bd = de = ef = fg; verlängere ac bis ch = ac, durch c ziehe

man eine Parallele mit ag, mache ci = ik = kl = lm = mn = ab, ziehe durch b, i; d, k; e, l; f, m gerade Linien, desgleichen durch i, d; k, e; l, f; m, g; so daß jene von diesen geschnitten werden. Endlich verlängere man ib bis p, ng bis q ꝛc., so ergibt sich das Icosaëdrum.

5) Man beschreibe ein reguläres Fünfeck abcde (Fig. 19.), in der Richtung von d nach a ziehe man von a aus die af, und in der Richtung von d nach b von b aus, die bg, mache af = bg = ab, und mit der Eröffnung von ab beschreibe man aus f und g zwei einander in h schneidende Kreisbogen, ziehe fh und gh, so erhält man das reguläre Fünfeck abghf. Auf dieselbe Art beschreibe man noch reguläre Fünfecke über bg, hg, hf, fa. Endlich verbinde man mit einem dieser Fünfecke um abcde ein siebentes, um welche wieder die fünf andern k, l, m, n, o auf die vorhin gezeigte Art beschrieben werden können. Diese 12 reguläre Fünfecke machen das Netz des Dodecaedrums aus.

Zus. Zur völligen Darstellung dieser Körper und zur Zeichnung ihrer Netze, darf nur eine Seitenlinie gegeben seyn.

Anm. 1. Auf ähnliche Weise lassen sich Netze von den nachfolgenden Körpern zeichnen. Mühsam aber ist es, das Netz einer Kugel mit vollkommener Genauig-

keit abzubilden. Es besteht gewöhnlich aus einer Reihe mit einander verbundener Kreissegmente. Allein die Grenzen der Segmente werden durch andere Linien bestimmt, die sich ohne Veränderung ihrer Länge, in Kreisbogen krümmen.

Anm. 2. Die Theorie der regulären Körper läßt sich hier nur nuvollkommen vortragen. Mehreres davon kommt in dem folgenden Abschn. der Körperlehre vor. Man kann sie aber mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie leicht und vollständig entwickeln. Zu diesem Ende vergl. man meine sphär. Trig. 2. Aufl. von (§. 116—129).

---

b) Von den Prismen und den Pyramiden.

§. 23. Erkl. Es sey ABCDE (Fig. 20.) eine beliebige, geradlinige, ebene Figur. Aus A errichte man unter einer willkürlichen Neigung gegen die Ebene ABCDE eine gerade Linie AF. Alsdann lege man durch die drei Punkte A, B, F eine Ebene und durch B ziehe man in dieser Ebene BG der AF parallel. Auf dieselbe Art lege man durch G, B, C eine Ebene und durch C ziehe man CH der BG parallel. Setzt man dieses Verfahren auf die gezeigte Art fort, so erhält man die Ebenen CI, DK, EF ꝛc. und

es ist BG der CH; CH der DI parallel ꝛc. Legt man nun noch durch einen willkührlichen Punkt F, der genommenen Ebene ABCDE eine andere FGHIK parallel, so schneidet diese die Ebenen AG, BH, CI, DK, EF und begrenzt mit ihnen und der gedachten ABCDE einen geometrischen Körper, welcher das Prisma genannt wird; die beiden parallele Ebenen nennt man Grundflächen, die übrigen hingegen Seitenflächen (hedrae). Der lothrechte Abstand beider Grundflächen von einander heißt des Prisma's Höhe.

Also sind 1) die Seitenflächen lauter Parallelogramme.

2) Nimmt man die beliebig gegen die Grundfläche geneigte Seitenlinie AF auf derselben senkrecht an, so müssen alle übrige damit parallellaufende Linien wie BG, CH ꝛc. auf derselben senkrecht stehen. In solchem Falle heißt das Prisma selbst ein gerades (pr. rectum); in jeder andern Lage aber ein schiefes (obliquum).

3) Die beiden Grundflächen sind einander gleich, ähnlich und parallel. Sie sind parallel nach der Construction; gleich und ähnlich, weil ihre gleichnahmigen Seiten AB und FG; BC und GH ꝛc. als gegenüberliegende Seiten der Parallelogramme AG, BH und die gleichliegenden Winkel ABG und FGH,

BCD und CHI ꝛc. wegen (§. 13.) einander gleich sind.

4) Schneidet man das Prisma mit einer Ebene der Grundfläche parallel, so ist die dadurch entstandene Durchschnittsfigur LMNOP, der Grundfläche gleich und ähnlich, weil F auch in L könnte angenommen worden seyn.

Anm. Man kann sich auch vorstellen ein Prisma entsteht, indem sich eine nach Willkür angenommene Grundfläche längs einer geraden Linie in paralleler Lage bewege.

§. 24. Erkl. Ein Prisma wie (F. 24), dessen Grundflächen Parallelogramme sind, hat auch Parallelogramme zu Seitenflächen. Daher nennt man ein solches Prisma ein Parallelepipedum. Es heißt senkrecht, wenn eine Seitenlinie ꝛc. der Seitenflächen auf der Grundfläche ABC senkrecht steht. Es heißt ein Würfel (cubus), wenn die Seitenlinien in der gedachten Lage auch von gleicher Größe sind.

Zus. 1. Werden also drei gerade Linien AB, AC, AE (Fig. 21) gegeben, welche sämmtlich durch den Punkt A gehen, und welche mit einander Winkel von gegebener Größe einschließen, so kann man vermittelst dieser drei geraden Linien, ein Pppbd. verzeichnen. Man darf nur durch den Endpunkt jeder Linie eine Ebene legen, welche der Ebene, durch die beiden an=

dern Linien parallel läuft, durch B die BH der AG, durch C die CH der AF und durch E die EH der AD parallel. Diese sich gegenseitig treffenden Ebenen werden das verlangte Pppd. AH begrenzen.

Zus. 2. Die Gleichheit zweier Würfel, setzt nur gleiche Seitenlinien voraus, bei ungleichen Würfeln gehört zur größern Seitenlinie die größere, zur kleinern der kleinere Würfel.

§. 25. Erkl. Nimmt man (Fig. 20.) über der beliebigen geradlinigen Ebene BCDEF einen beliebigen Punkt A an, und ziehet alsdann aus A, nach allen Winkelpunkten der Figur, die geraden Linien AB, AC, AD . ., so heißt der auf diese Weise begrenzte Körper eine Pyramide. Die Ebene BCDEF nennt man die Grundfläche, den Punkt A die Spitze, und die Dreiecke ABC, ACD . . die Seitenflächen der Pyramide. Ihre Höhe heißt der von der Spitze A auf die Grundfläche BCDEF herabgelassene Perpendikel. Die Pyramide ist drei- vier- oder vielseitig, oder drei- vier- oder vieleckig, je nachdem die Grundfläche ein Dreieck, Viereck ꝛc. oder Vieleck ist.

§. 26. Erkl. Eine gleichseitige Pyramide nennt man diejenige, deren Grundfläche ein reguläres Polygon und deren Höhe (die Axe) der Perpen-

dikel ist, welcher, von der Spitze herabgelassen, durch den Mittelpunkt der Grundfläche geht.

Zus. Also sind die Seitenflächen einer gleichseitigen Pyramide lauter gleiche, ähnliche und gleichschenklige Dreiecke.

Anm. Unter den Buchstaben, welche in der Figur an der Pyramide stehen, werde ich denjenigen, welcher an die Spitze gesetzt ist, in der Bezeichnung allemahl zuerst angeben.

§. 27. Lehrs. Wird eine Pyramide vermittelst einer Ebene der Grundfläche parallel geschnitten, so ist die Durchschnittsfigur der Grundfläche ähnlich. Denn es verhält sich AF : Af = FB : fb (§. 99.) und AF : Af = FE : fe folglich FB : fb = FE : fe. Dieses gilt aus denselben Gründen von den übrigen Umfangslinien der beiden Figuren. Ferner ist FB der fb und FE der fe parallel (§. 13.), welches auch bei den übrigen Seiten Statt findet. Daher ist bcdef ∽ BCDEF.

Hieraus folgt nun, daß

1) die ebenen Flächen bcdef und BCDEF sich wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten, d. i. $= bc^2 : BC^2$ rc. verhalten (Eb. G. §. 131. Zus. 2.).

2) zwei gleichnahmige Seiten, der ebenen Flächen bcdef und BCDEF sich wie die respectiven Höhen, d. i. wie die Perpendikel verhalten, welche

Bayerische Staatsbibliothek München

man aus der Spitze A der Pyramide auf bcdef und BCDEF herablassen kann;

3) wenn die Seitenlinien zweier Pyramiden Fig. 27) proportional geschnitten werden, sich die Durchschnittsfiguren EFG und efg wie die Grundflächen BCD und bcd verhalten werden. Denn da

$AB : AE = ab : ae$ ist, so ist auch

$AB^2 : AE^2 = ab^2 : ae^2$. Es ist aber

$AB^2 : AE^2 = BCD : EFG$ (Zus. 2.)

$ab^2 : ae^2 = bcd : efg$ (Zus. 2.), folglich

$BCD : EFG = bcd : efg$

4) wenn man die Begriffe von der Aehnlichkeit der Körper, auf Pyramiden anwendet, die abgeschnittene Pyramide, der ganzen ähnlich sey. Denn die gleichnahmigen Seitenflächen haben in beiden eine ähnliche Lage, sie sind einander ähnlich und bilden mit den respectiven Grundflächen gleiche Flächenwinkel. ꝛc.

§. 28. Will man nun die Oberflächen dieser Körper berechnen, so setzt man dieselbe bei dem Prisma aus beiden Grundflächen, bei der Pyramide aus der Grundfläche, wozu bei beiden noch die Summe der Seitenflächen kommt. Die Grundflächen kann man entweder aus den Umfangs- und Diagonallinien trigonometrisch oder aus den Höhen und Grundlinien der Dreiecke berechnen, in welche sich die Grundflächen zerlegen

lassen. Die Oberfläche F eines geraden Prisma's aber (Fig. 20.) wird ohne die Grundflächen gefunden, wenn man den Umfang der Grundlinie, mit der Höhe, welche wir mit h bezeichnen wollen, multiplicirt. Daher ist dieselbe h (AB + BC + CD + DE + EA). Bezeichnet nun f den Flächeninhalt der Grundfläche, so ist die gesammte Oberfläche eines Prisma = 2f + h (AB + BC + CD + DE + EA).

Zus. Ist das Prisma ein schiefes, so setzt man LM, MN senkrecht auf BG, CH ꝛc. Dieses kann in der Ausübung leicht dadurch geschehen, daß man eine Schnur um diesen Körper nach der gedachten Richtung legt, oder durch ein aufgesetztes Winkelmaß diese Richtungen bestimmt. Bezeichnet man nun die Winkel IAB, GBC ꝛc. mit α, β c., so ist wenn man selbige vermittelst eines Winkelhackens gemessen hat, auch der schiefe Winkel eines jeden Parallgr., d. i. ABG = α, BCG = β ꝛc. und die Umfangslinien AB, BC ꝛc. bestimmt oder gemessen worden sind, in diesem Falle ist LM = AB sin α; MN = BC sin β; MN = CD sin γ ꝛc. Ist nun die gegen die Grundfläche geneigte Seitenlinie AF = k, so beträgt die Summe der das Prisma begrenzenden Seitenflächen, = k (AB sin α + BC sin β + CD sin γ + . .) (Trig. §. 17.),

wozu für die ganze Oberfläche des Prisma's noch die doppelte Grundfläche kommt.

§. 29. Aufg. Die Oberfläche einer Pyramide zu berechnen.

Aufl. Die Grundfläche berechne man, wie in der vorigen Aufgabe bemerkt wurde. Die Seitenflächen sind Dreiecke, deren Flächeninhalt aus der Grundlinie und Höhe eines jeden gefunden werden kann. Ihre Summe gibt mit der Grundfläche, der Pyramide ganze Oberfläche. Die Höhe läßt sich nicht immer bequem messen. Daher sie aus denjenigen Stücken abgeleitet werden kann, die sich leicht ausmessen lassen. Kann man die drei Seiten unmittelbar messen, so kann man die Höhe entbehren und überdieß noch zwei Seitenlinien zur Berechnung der angrenzenden Theile benutzen. Ist z. B. AC $= a$, BC $= b$, AB $= c$; so ist dieses △ Seitenfläche $= \frac{1}{4} \sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}$ (Trig. §. 34.).

Zus. 1. Kann man einen Winkel messen, so läßt sich die Höhe k der Seitenfläche aus diesem Winkel und der anliegenden Seite leicht berechnen. Auch kann man (Fig. 28.) aus d eine gerade Linie senkrecht auf ae herablassen und darnach die Seitenfläche geometrisch berechnen.

Zus. 2 Die Abmessungen zur Berechnung einer

gleichseitigen Pyramide sind die Seite und der Umfang u, welcher, wenn s die Seite bezeichnet, $= us$ ist. Dieser Umfang gibt die Oberfläche des gedachten Körpers, wenn selbiger in die halbe Höhe $\frac{1}{2}k$ einer Seitenfläche multiplicirt wird, wozu aber noch die Grundfläche $= \frac{1}{2} ns^2 \cos \frac{1}{2} \alpha$ gerechnet werden muß.

c) Von dem geometr. Inhalte der prismatischen Körper und Pyramiden.

§. 29. Zwei geometrische Körper sind einander gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, und wenn ihre Durchschnittsfiguren mit einer der Grundflächen parallelen Ebene, von gleicher Größe sind. Dieses ist der bekannte Grundsatz der unendlichen Theilbarkeit des Cavaleri, nach welchem die Gleichheit zweier geometr. Körper überhaupt geprüft werden kann; indeß läßt sich die Gleichheit derselben auch unabhängig von diesem Satze leicht und gründlich darthun. Bei einem Körper kommt es hauptsächlich auf die Größe der, denselben von allen Seiten begrenzenden Ausdehnung an, welche gefunden wird, wenn man ihn mit einem Körper von bekannter Größe, als Einheit oder als Maß, wozu man gewöhnlich den Würfel nimmt, vergleicht, d. h. wenn man untersucht, wie oft dieser Würfel, dessen Seite eine Ruthe, ein Fuß, Zoll 2c.

seyn kann, in dem andern Körper enthalten ist. Diese Vergleichung kann auf folgende Art angestellt werden.

§. 31. Der geometrische Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums kann allemahl durch eine Zahl ausgedruckt werden, welche angibt, wie oft die Seite des zur Einheit angenommenen Würfels in der Länge und Breite der Grundfläche dieses Körpers und in dessen Höhe enthalten ist.

Bew. Denn man nehme an des Würfels Seite wäre n mahl in AB (Fig. 24.), m mahl in BC als der Grundfläche des Pppd. und p mahl in dessen Höhe CK enthalten, so kann man durch die Theilungspunkte in AB Parallelen mit BC und durch die Theilungspunkte in BC Parallelen mit AC und durch die Theilungspunkte in CK Parallelebenen mit ABC ziehen. Dadurch wird der ganze Körper ABCK in gleiche Würfel zerlegt, deren mn in ABCa, und nmp in ABCK enthalten sind. Hierdurch findet man den körperlichen Inhalt eines Parallelepipedums, wenn man die aus einerlei Einheit ausgedruckten Abmessungen Länge, Breite und Höhe in einander multiplicirt.

Zus. Die Abmessungen eines Würfels sind von

gleicher Größe, daher findet man dessen Inhalt, wenn man zur Bildung des obigen Produktes eine derselben 3mahl als Faktor schreibt. Ist z. B. eine Seite desselben a = 673′, so ist des Würfels Inhalt = 304821217 C. F.

§. 32. Jedes Parallelepipedum wird durch eine Ebene, welche zwei gegenüberliegende Seitenflächen nach deren Diagonalen schneidet, in zwei gleiche Theile getheilt.

Es sey (Fig. 21.) AH das Pppd., AG, BH die Diagonalen zweier gegenüberliegender Seiten; so ist die, durch AG und BH gelegte Ebene ABHG die Diagonalfläche, welche nach der angeführten Behauptung das Pppd. halbirt.

Bew. Da AB der EF und GH der EF parallel ist, so ist auch AB der GH parallel, folglich sind die Diagonalen AG, BH mit AB und GH in einerlei Ebene und einander parallel. Die Plgrr. AD, EH; AF, CH; die Dr. ACG, AEG; BDH, BFH (E. G. §. 28.) sind einander gleich und ähnlich; auch ist ABHG ≌ ABHG, folglich werden die dreieckigen Prismen ACGHBD und AEGHFB von gleichen und ähnlichen Ebenen eingeschlossen (§16 3.), und das

Pppd. AH wird durch ABHG in zwei gleiche Theile getheilt.

1. Zus. Die Diagonalfläche ist ebenfalls ein Parallelogramm.

2. Zus. Auf der doppelten Grundfläche ACG eines dreiseitigen Prisma's läßt sich also zwischen denselben Parallelebenen ein Parallelepipedum beschreiben, welches zweimahl so groß, als das Prisma ist.

§. 33. Lehrs. Parallelepipeda auf einerlei Grundfläche und von gleichen Höhen, sind einander gleich.

Man muß bei diesem Satze zwei Fälle von einander unterscheiden, welche von der Lage beider Körper herrühren. Den ersten stellt die 22te und den andern die 23te Figur dar. In jenem Falle stehen sie zwischen denselben parallelen Ebenen IDCM und FABL; in diesem aber liegen sie nicht zwischen diesen parallelen Ebenen.

Bew. Die dreiseitigen Prismen NIDAFK und MHCBGL sind einander gleich. Ziehet man nun jeden derselben von dem ganzen Körper DL ab, so bleiben die gleichen Prismen AH und AM übrig.

II. Im zweiten Falle sind die beiden Pppda (Fig. 23.), welche auf einerlei Grundfläche stehen, ABCDEFGH und ABCDIKLM. Die der ABCD ent-

entgegengesetzten Grundflächen EFGH, IKLM liegen, nach der Voraussetzung, in einerlei Ebene. Nun erweitere man die Ebenen der beiden parallelen Seitenflächen ABEF und DCGH, und auf dieselbe Art die parallelen Seitenflächen ADMI und BCLK; so wird dadurch das Parallelepipedum ABCDVWXZ gebildet, welches von der, durch die beiden obern Grundflächen gehenden Ebene, begrenzt wird. Nun hat das Pppd. AG gegen AX dieselbe Lage, wie im ersten Falle. Es ist daher Pppd. AG=AX, aber das Pppd. AL hat auch gegen AX die nach den Bedingungen des ersten Falls bestimmte Lage. Daher ist das Pppd. AL=AX, folglich Pppd. AG = AL.

Zus. Hieraus läßt sich die Folge ziehen, daß jedes Pppd. AG, welches gegen die Grundfläche geneigt ist, d. h. dessen Seitenlinien AE, BF ꝛc. auf der Grundfläche schief stehen, mit Beibehaltung dieser Grundfläche in ein rechtwinkliges Pppd. AL von gleichem Inhalte, verwandelt werden kann. Das letztere aber läßt sich wieder in ein anderes verwandeln, welches zur Grundfläche ein dem Parallelogramm AC gleiches Rechteck, und dessen Seitenlinien gegen die Grundfläche, ihre senkrechte Lage behalten. So kann jedes Parallelepipedum in ein rechtwinkliges verwandelt werden.

§. 34. **Dreiseitige Pyramiden auf gleichen Grundflächen und von gleichen Höhen, sind einander gleich.**

Bew. Wenn man das Stück BIGMLC (Fig 28) der Pyramide ADEF mit den beiden zwischen den parallelen Ebenen NRB und QSC enhaltenen Prismen IBGTAV und CLMRNB vergleicht, so ist dasselbe größer als jenes und kleiner als dieses, aber der Unterschied zwischen diesem Stücke und jenem der beiden Prismen ist kleiner als der Unterschied ihrer beiden Grundflächen, oder auch der beiden gedachten Körper. Dasselbe Verhältniß findet bei jedem folgenden Stück der Pyramide Statt. Allein der Unterschied zweier solcher Grundflächen wird *immer* kleiner, je näher sie an einander kommen. Diese Annäherung geschieht durch die fortgesetzte Theilung der AB, BC, CD 2c. und da diese unbegrenzt ist, so wird der Unterschied kleiner, wie jede angebliche Größe. Dadurch wird das Pyramidenstück der kleinsten Höhe, dem Prisma von derselben Höhe gleich. Legt man nun die schneidenden Ebenen in beiden Pyramiden in gleichen Entfernungen von einander, so sind dieselben, wegen der gleichen Grundflächen, einander gleich (§. 27.). Daher kann man beide Körper in eine gleiche Anzahl zusammengehöriger Stücke theilen. Machen nun MLCIGB und mlcigb

ein Paar zusammengehöriger Stücke von unendlich kleiner Höhe aus, so kann man sich anstatt ihrer, die dreieckige Prismen von gleicher Höhe nehmen, und da diese einander gleich sind, so werden auch sämmtliche Pyramidenstücke, folglich die Pyramiden selbst, einander gleich seyn.

§. 35. Lehrs. Jede dreiseitige Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma, welches mit ihr einerlei Grundfläche und Höhe hat.

Bew. Man lege (Fig. 26.) eine schneidende Ebene durch die drei Punkte A, F und C und eine andere durch die drei Punkte D, F und C; so entstehen dadurch die drei zur Seite des Prisma besonders gezeichneten Pyramiden ACBF, CADF und CDEF, welche im Prisma enthalten und zur leichtern Vergleichung, in beiden Figuren mit gleichen Buchstaben bezeichnet sind. — Die erste und zweite Pyramide, haben zu Grundflächen zwei gleiche und ähnliche Dreiecke AFB und AFD (E. G. §. 52.), welche im Prisma das Parallelogramm ABFD bilden, und ihre Spitzen liegen in C beisammen; folglich haben sie auch gleiche Höhen und sind daher einander gleich (§. 34.). Die erste Pyramide FABC ist aber auch der dritten CDEF, folglich die erste und dritte, der zweiten, also sind sie alle drei einander gleich. Da-

her ist die Pyramide FABC der dritte Theil des Prisma ABCDEF.

1. Zus. Also berechnet man den körperlichen Inhalt des Tetraedrums als eine dreiseitige Pyramide.

2. Zus. Jedes vielseitige Prisma läßt sich durch Diagonalflächen in so viel dreiseitige theilen, als Dreiecke in der Grundfläche sind, und auf eine ähnliche Art jede vielseitige Pyramide in dreiseitige eintheilen. Die Berechnung eines dreiseitigen Prisma's liegt demnach der Berechnung der vielseitigen Prismen und der drei- und vielseitigen Pyramiden zum Grunde.

3. Es ist demnach, in der Voraussetzung von (Zus. 2.), jede Pyramide der dritte Theil eines Prisma mit derselben Grundfläche und Höhe.

4. Zus. Setzt man daher auf einerlei Grundfläche eine Pyramide und ein Prisma, so, daß diese Höhe, den dritten Theil von der Höhe der Pyramide beträgt, so sind beide Körper von gleichem Inhalt.

5. Der körperliche Inhalt eines dreiseitigen Prisma wird demnach gefunden, wenn man das Dreieck als Grundfläche betrachtet und diese mit der Höhe des Prisma's multiplicirt. Denn wäre ACG (Fig. 21.) die Grundfläche des dreiseitigen

Prisma's ACGHDB, so lege man durch GH eine Ebene GF der BC und durch AB eine Ebene AF der CH parallel und erweitere die beiden Grundflächen AGC und BDH, so ist das Pr. GCB = AGF (§. 32.). Nun ist also das Pr. GCB + AGF = GCB + GCB = CF oder 2GCB = CF, folglich GCB = $\frac{1}{2}$ CF. Ist nun h der senkrechte Abstand der beiden Grundflächen, CE und DF, so ist das Prisma CF = h . CE = 2AGC . h, folglich das Pr. GCB = AGC . h. Hiernach läßt sich mit Zuziehung des 2. Zus. übersehen, wie man den Inhalt eines jeden vielseitigen Prisma's finden kann.

c) Von der Berechnung des körperlichen Inhaltes der Prismen und Pyramiden.

§. 36. Aufg. Den körperlichen Inhalt eines Prisma's, oder einer Pyramide, zu berechnen.

Aufl. Man multiplicire die Zahl B, welche den Inhalt der Grundfläche bezeichnet mit derjenigen, welche die Höhe A des Prisma ausdruckt, so gibt das Produkt AB, den körperlichen Inhalt des Prisma P an, d. h. es ist P = AB. Ist der Körper eine Pyramide, deren Grundfläche und Höhe dieselben Abmessungen habe, so ist ihr Inhalt = $\frac{1}{3}$ AB.

Ist z. B. B = 475,70 Q. F. und A=36,4 F., so ist P = 17315,480 Cubf.

Zus. 1. Ist der körperliche Inhalt eines Würfels p bekannt, so ist $p = a^3$ und also $a = \sqrt[3]{p}$.

2. Zus. Bezeichnen P und p den Inhalt zweier Parallelepipeda, A und a ihre Höhen, B und b ihre Grundflächen, so ist $P:p = AB:ab$.

3. Zus. Setzt man demnach bei einem Prisma, die Höhe = A und die Grundfläche = B, so ist $P = AB$; $B = \frac{P}{A}$ und $A = \frac{P}{B}$.

4. Zus. Sind P und p ähnliche Parallelepipeda, deren Grundflächen durch $B = GH$ und $b = gh$ vorgestellt werden, so ist bei demselben $A:a = G:g = H:h$ und es verhält sich $P:p = A^3:a^3 = G^3:g^3$ 2c. Diese Verhältnisse lassen sich auch nach (Alg. §. 54. Z. 1.) leicht an ähnlichen prismatischen Körpern zeigen. Bei ähnlichen Körpern kann man anstatt der gleichnahmigen Seitenlinien, proportionale Theile der gedachten Seiten, welche in denselben eine ähnliche Lage haben, auf dieselbe Art mit den Körpern vergleichen.

5. Zus. Ist die Seitenlinie eines prismatischen Körpers = a gegeben, so kann man sehr leicht die

Seitenlinie eines ähnlichen Körpers finden, welche in demselben eine der a ähnliche Lage hat, und die sich zu der gegebenen wie m : 1 verhält. Denn sind p und P ähnliche prismatische Körper, davon jener gegeben und dieser gesucht wird, so verhalten sich diese, wie die gleichnahmigen Linien $1 : m = a^3 : b^3$, folglich ist $b^3 = ma^3$, oder $b = a\sqrt[3]{m}$.

Zus. 6. Ist nun $P = p$, so ist $A : a = b : B$, d. h. bei gleichen Prismen oder Pyramiden verhalten sich ihre Höhen umgekehrt wie ihre Grundflächen.

Zus. 7. Die Höhe eines schiefen Prisma's sucht man in der Regel durch unmittelbare Messung. Man kann aber selbige auch bestimmen, wenn man sich auf die Grundfläche oder deren Erweiterung eine senkrechte Linie herabläßt und den Neigungswinkel φ der Seitenfläche gegen die Grundfläche nach (§. 11.) bestimmt. Ist nun ausser einem Winkel α des Parallelogramms noch eine Seitenlinie k bekannt, so hat man den einen Schenkel des Neigungswinkels $k \sin \alpha$ und die Höhe des Prisma's $A = k \sin \alpha \sin \varphi$.

Zus. 8. Vergleicht man überhaupt zwei Prismen oder Pyramiden mit einander, so verhalten sie sich wie die Produkte aus ihren Grundflächen uud Höhen, d. i. $P : p = AB : ab$. Sind ihre Grundflächen

oder Höhen gleich, so verhalten sie sich wie die ungleichen Höhen oder Grundflächen.

Zus. 9. Aehnliche Pyramiden verhalten sich wie die Würfel ihrer gleichnahmigen Seiten.

§. 37. Aufg. Den körperlichen Inhalt einer abgekürzten Pyramide aus den beiden Grundflächen und ihrem lothrechten Abstand von einander (Höhe) zu berechnen.

Aufg. Es sey die untere Grundfläche der abgekürzten Pyramide = B, die obere = b, ihre Höhe = A, so findet man ihren körperlichen Inhalt, wenn die Höhe der ganzen und die Höhe der abgekürzten Pyramide bekannt wäre. Setzt man jene = x, diese = z, und den gesuchten Inhalt = K, so ist $K = \frac{1}{3}(Bx - bz)$. Nun verhält sich

1) $x^2 : z^2 = B : b$

2) $x : z = \sqrt{B} : \sqrt{b}$

3) $x - z : x = \sqrt{B} - \sqrt{b} : \sqrt{B}$

Es ist aber $x - z = A$, folglich

4) $x = \frac{A\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$ und

5) $z = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}}$ (nach 2) $= \frac{A\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$ (nach 4)

6) $K = \frac{1}{3}(Bx - bz) = \frac{1}{3} A \frac{B\sqrt{B} - b\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$.

Es sey z. B. $B = 16384$ Q. F., $b = 5329$ Q. F., und $A = 140$, so ist $\sqrt{B} = 128$, $\sqrt{b} = 73$ und $\frac{B\sqrt{B} - b\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} = \frac{1708135}{55} = 31057$, also die abgek. Pyr. $= \frac{1}{3} A . 31057 = 1242280$ Q. F.

Zus. Durch Reduction od. wirkliche Division des eingeschlossenen Zählers durch den Nenner im obigen Ausdruck für K, erhält man $K = \frac{1}{3} A (B + b + \sqrt{Bb})$. Berechnet man nun den Werth von K nach diesem Ausdruck, so findet man denselben $=$ $\frac{1}{3}(16384 + 5329 + 21713) A = \frac{1}{3} A . 31057 = 1242280$ wie oben. Man kann aber auch den Inhalt der abgekürzten Pyramide aus der obern oder untern Grundfläche und zwei gleichnahmigen Seitenlinien finden. Bezeichnet man diese durch n und m, und erinnert sich, daß sich $n^2 : m^2 = b : B$, folglich $n : m = \sqrt{b} : \sqrt{B}$ verhält, folglich $B = \frac{m^2 b}{n^2}$ ist, so erhält man $K = \frac{1}{3} A \left(\frac{m^2 b}{n^2} + b + \frac{m}{n} b\right) = \frac{1}{3} Ab \left(1 + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n^2}\right)$; oder wenn man $b = \frac{n^2}{m^2} B$ setzt, $K = \frac{1}{3} AB \left(1 + \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2}\right)$. Diese Ausdrücke gelten für alle Arten von Pyramiden.

§. 38. Aufg. Den Inhalt eines dreiseitigen schief abgeschnittenen Prisma's zu berechnen.

Aufl. Man setze (Fig. 29) eine Ebene senkrecht auf die Seitenlinie und bemerke die durch diese fortgeführte Ebene bewirkte Durchschnittsfigur GHK, so gibt das Produkt aus GHK in den 3ten Theil der Summe der Seiten AD, CE und BF, den verlangten Inhalt an.

Bew. Denn legt man durch E, G und H eine Ebene, so wird dadurch der Theil DEFGKH in zwei Pyramiden zerlegt, deren eine das Trapez GDFH und die andere das △ GKH zur zur Grundfläche hat. Die Höhe der ersten Pyramide ist der aus E auf die Grundfläche gefällte Perpendikel, welche so groß als die senkrechte KL ist, die Höhe der andern ist EK. Berechnet man sich diese Pyramiden nach (§. 36.) aus den Grundflächen und Höhen, so ist das obere Stück des Prisma $= \frac{1}{3}[\frac{1}{2}(DG+FH) . \frac{1}{2}KL . GH + \frac{1}{2}GHL . KE]$ $= \frac{1}{3}(DG+FH+EK)GHK$. Dieses Verfahren läßt sich an dem andern Theil auf gleiche Art ausführen und wenn man beide Stücke zusammensetzt, so erhält man das ganze Prisma $= \frac{1}{3}(AD+CE+BF) . GHK$.

Zus. Jedes vielseitige schief abgeschnittene Prisma, läßt sich durch Diagonalflächen in lauter dreisei-

tige zerlegen, deren jedes nach der obigen Aufgabe berechnet und deren Summe, den Inhalt des vielseitigen Prisma's gibt.

Anm. Vermöge der gezeigten Zerlegung des obigen Prisma's, kann man auch den Inhalt vieler andern irregulären Korper finden. Läßt sich aber ein solcher Körper nicht in andere bekannte Körper, als in Prismen oder Pyramiden ꝛc. zerlegen, so muß man zu andern Mitteln seine Zuflucht nehmen und den Inhalt derselben durch ihr besonderes Gewicht oder dadurch bestimmen, daß man diese Körper in solche mit Wasser angefüllte Gefäße legt, deren Abmessungen bekannt sind. ꝛc.

Zus. Die Oberfläche einer abgekürzten Pyramide wird aus den beiden Grundflächen und den Seitenflächen berechnet. Jene zerlegt man durch Diagonalen in Dreiecke, oder durch Parallelen in Trapeze, und diese sind Trapeze. Die Summe der beiden Grundflächen und der Trapeze bilden die Oberfläche des ganzen Körpers und können nach den in der ebenen Geom. (§.129.) angeführten Regeln leicht berechnet werden.

d) Von dem Cylinder und dem Kegel.

39. Erkl. Wenn man die Mittelpunkte A, C (Fig. 34.) zweier gleichen und parallelen Kreise BEG und DFH durch eine gerade Linie AC verbindet, alsdann aber um diese Kreise eine gerade Linie

LM von unbestimmter Länge so lange, sich und der AC parallel bewegt, bis sie wieder in die erste Lage kommt, so heißt die von LM beschriebene Fläche die krumme cylindrische Oberfläche, der von dieser Oberfläche und den beiden gedachten Kreisflächen als Grundflächen begrenzte Raum, der Cylinder, die Verbindungslinie AC, die Axe des Cylinders, jede andere gerade, beide Grundflächen berührende der AC parallele Linie, eine Seite desselben. Steht die Axe auf den Grundflächen senkrecht, so heißt der Cylinder ein senkrechter (rectus), in jedem andern Falle, ein schiefer (scalenus).

Zus. Jede Durchschnittsfigur des Cylinders gibt einen Kreis, wenn die schneidende Ebene mit den Grundflächen parallel läuft. Geht aber die schneidende Ebene durch die Axe oder durch eine der Axe parallele Linie, so ist die Durchschnittsfigur ein Rechteck und beim schiefen Cylinder ein Parallelogramm.

§. 40. Erkl. Aehnliche Cylinder nennt man diejenigen, deren Axen den Durchmessern der Grundflächen proportional sind. Bei schiefen Cylindern müssen die Axen mit ihren Grundflächen auch gleiche Neigungswinkel haben.

Anm. Wird ein cylindrischer Körper durch die Umdrehung eines schiefwinkligen Parallelogramms um eine seiner Seiten beschrieben, so gibt die beschreibende Li-

nie zwar eine krumme Cylinderfläche, wie in (§. 208.), beim geraden Cylinder; allein die beiden Grundflächen sind nicht Kreisflächen, wie in (§. 108.), sondern Kegelflächen.

§. 41. Lehrs. Die krumme Oberfläche f eines geraden Cylinders ist so groß als ein Rechteck, dessen Grundlinie ac (Fig. 35.) dem Umfange der Grundfläche agah und dessen Höhe der Axe a des Cylinders gleich ist.

Bew. Denn legt man ein solches Rechteck gehörig um den Cylinder, so wird dessen krumme Oberfläche f dadurch völlig begrenzt. — Es ist demnach, wenn r den Halbm. der Grundfläche bezeichnet, $f = 2ar\pi$ und die gesammte Oberfläche, $= 2ar\pi + 2r^2\pi = 2r\pi (a + r)$.

1. Zus. Bezeichnet f′, a′ und r′ dieselben Abmessungen an einem andern Cylinder, so verhält sich $f : f' = ar : a'r'$.

2. Zus. Folglich ist die Cylinderfläche so groß als ein Kreis, dessen Halbmesser die mittlere geom. Proportionallinie zwischen der Höhe und dem Durchmesser des Cylinders ist. Man nehme an, der Halbmesser des, der Cylinderfläche gleichen Kreises, sey ϱ, so ist $\varrho^2\pi = 2ar\pi$, folglich $\varrho = \sqrt{2ar}$.

§. 42. Aufg. Den körperlichen Inhalt eines Cylinders zu finden.

Aufl. Bezeichnet A die Höhe, B die Grundfläche des Cylinders, so ist $C = AB$, allein B ist hier eine Kreisfläche, deren Halbmesser durch R bezeichnet werden kann; daher ist $C = AR^2\pi$.

Bew. Man kann die Cylinderfläche, als eine prismatische Fläche betrachten, welche aus unendlich vielen und unendlich kleinen Ebenen zusammengesetzt ist. Das Uebrige geschiehet wie beim Prisma.

1. Zus. Bezeichnen nun c, r und a die ähnlichen Abmessungen eines andern Cylinders, so verhält sich $C : c = AR^2\pi : ar^2\pi = AR^2 : ar^2$. Sind hier die Höhen gleich, d. i. $A = a$, so ist $C : c = R^2 : r^2$, und sind die Halbmesser der Grundflächen gleich, so ist $C : c = A : a$.

2. Zus. Zwei Cylinder sind gleich, wenn ihre Höhen den Grundflächen umgekehrt proportional sind, d. h. es ist $C = c$, wenn $A : a = r^2\pi : R^2\pi$ und bei gleichen Cylindern sind die Höhen den Grundflächen umgekehrt proportional, d. h. es ist $A : a = r^2\pi : R^2 a$, wenn $C = c$ ist.

3. Zus. Aehnliche Cylinder verhalten sich wie die Würfel ihrer Höhen, oder wie die Würfel der Durchmesser ihrer Grundflächen.

4. Zus. Bei zwei Cylindern c und C, kann c als das Maaß (Einheit) angesehen werden, wodurch der Inhalt eines jeden andern Cylinders C berech-

net werden kann. Es ist nehmlich $C = mn^2c$, wenn $D = nd$ und $A = ma$ ist. Denn es ist, wenn D und d ihre Durchmesser bezeichnen, $C : c = D^2A : d^2a = mn^2d^2a : d^2a = mn^2 : 1$; also $C = mn^2c$. Ist nun $A = a$, so muß $m = 1$ seyn, und in dieser Voraussetzung ist $C = n^2c$. Soll nun $C = 2c, 3c, 4c, 5c \ldots$ seyn, so muß $n^2 = 2, 3, 4, 5 \ldots$ folglich $n = \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5} \ldots$ seyn.

5. Zus. Läßt sich an einem Cylinder der Durchmesser der Grundfläche bequem messen, so erhält man $B = \frac{1}{4} D^2\pi = 0{,}7853981\, D^2$. Bestimmt man die Höhe A aus der Seitenlinie k und dem Neigungswinkel ψ gegen die Grundfläche, so ist $A = k \sin\psi$, folglich $C = kR^2\pi \sin\psi = \frac{1}{4} kD^2\pi \sin\psi$ und $\log C = 2\log D + \log k + \log \sin\psi + 0{,}8950899 - 1$ ist. Stellt man sich bei (Fig. 1.) unter AB die Axe eines Cylinders und unter CD die Seitenlinie des Kegels, so ist $CDE = \psi =$ dem Neigungswinkel.

6. Zus. Läßt sich aber der Durchmesser eines Cylinders nicht bequem messen, so bestimmt man denselben auf eine schickliche Art aus seinem Umfange. Alsdann ist der körperliche Inhalt $C = \frac{1}{4}p^2 k \sin\psi$, wo $p = \frac{2R}{\pi}$ ist.

7. Zus. Aus $C = \frac{1}{4}AD^2\pi$, erhält man die Höhe $A = \frac{4C}{\pi D^2}$, und den Durchmesser $D = \sqrt{\frac{4C}{\pi A}} = 2\sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{C}{A}} = 2\sqrt{0,3183\ldots} \times \sqrt{\frac{C}{A}}$ $= 1,128379 \times \sqrt{\frac{C}{A}}$.

8. Zus. Ist die Höhe A eines Cylinders dem Durchmesser D seiner Grundfläche gleich, so wird C $= \frac{1}{4}D^3\pi$. Hieraus erhält man für $D = \sqrt[3]{\frac{C}{4\pi}}$.

9. Zus. Nennt man den körperlichen Inhalt der cylindrischen Röhre V, die Halbmesser der auswendigen und inwendigen Röhre R und r, A die gemeinschaftliche Höhe, so ist $V = A(R^2 - r^2)\pi$; $= A(R+r)(R-r)\pi$; folglich ist $A = \frac{V}{(R^2 - r^2)\pi}$.

Wie groß ist z. B. die Höhe eines Mühlsteins, dessen Durchmesser 4 Fuß, dessen kreisförmige Oeffnung in der Mitte (das Läuferauge) im Durchmesser 6 Zoll, dessen Gewicht 3280 Pfd. beträgt, und wenn ein Cubf. Sandstein dieser Art 164 Pfd. wiegt.

Hier ist $A = \frac{20}{(4-\frac{1}{4})3,1415926} = \frac{20}{\frac{15}{4} \cdot 3,14\ldots} =$ $\frac{80}{47,123889} = 1,69765\ldots$ Fuß.

10.

10. Zus. Sind die Durchmesser D und d der Grundflächen zweier Cylinder von gleicher Höhe, verschieden, so ist ihre Summe $S = \frac{1}{4}\pi(D^2 + d^2)A$; allein $D^2 + d^2$ ist das Quadrat des Durchmessers eines Kreises, der so groß ist, als die Summe zweier Kreise, deren Durchmesser D und d bezeichnen. Daher lassen sich zwei Cylinder von der angeführten Beschaffenheit, leicht in einen verwandeln, der den beiden gedachten gleich ist.

11. Zus. Zur Berechnung des körperlichen Inhaltes eines Ausschnittes aus dem Cylinder wie BAEDCF (Fig. 34.), muß man, ausser dem Halbmesser der Grundfläche entweder die Länge des Bogens DF = b oder den W. am Mittelpunkt DCF messen. Ist nun die Höhe AC = A und ausser CD = r noch b bekannt, so ist der Kreisausschnitt DCI = $\frac{1}{2}$ br (§. 44. Z. 6.) und der körperliche Ausschnitt = $\frac{1}{2}$ Abr. Ist aber DCF = $\mathfrak{C}$ gemessen und in Graden, Minuten und Sekunden angegeben worden, so hat man $360^\circ : \mathfrak{C} = 2r\pi : b$ oder $b = \frac{2r\mathfrak{C}\pi}{360} = \frac{r\mathfrak{C}\pi}{180}$; oder $= \frac{r\mathfrak{C}'\pi}{180 \,.\, 60}$; oder $\frac{r\mathfrak{C}''\pi}{180 \,.\, 60 \,.\, 60}$ $= \frac{r\mathfrak{C}''\pi}{648000}$, d. i. je nachdem $\mathfrak{C}$ in Graden oder Minuten oder Sekunden bestimmt worden ist.

§. 42. Erkl. Nimmt man (Fig. 36.) über

einer Kreisfläche BED einen beliebigen Punkt A an, und ziehet man alsdann von A, an den Umfang der Kreisfläche die Tangente ABO unbestimmt fort, welche bei der unveränderten Lage von A so lange um den Umfang BED herumgeführt wird, bis sie in die erste Richtung kommt, so heißt die von dieser ABO beschriebene Oberfläche, die Kegelfläche (superficies conica), der von dieser Fläche und der angenommenen Kreisfläche begrenzte Körper, der Kegel, der angenommene feste Punkt A, der Scheitel, (vertex.); die Kreisfläche, die Grundfläche; eine die Punkte A und C verbindende gerade Linie, die Axe des Kegels. Steht die Axe auf des Kegels Grundfläche senkrecht, so heißt derselbe ein gerader oder gleichseitiger, sonst ein schiefer oder ungleichseitiger Kegel. Jener entsteht auch, wenn sich ein rechtwinkliges geradliniges △ ABC um AC als um eine Axe so lange herumdrehet, bis es wieder in die erste Lage kommt. Jede gerade Linie AB . . , die von A bis an den Umfang der Grundfläche geht, heißt eine Seite des Kegel.

§. 43. Erkl. Aehnliche Kegel sind diejenigen, deren Höhen den Durchmessern der Grundflächen proportional sind. Bei schiefen Kegeln müssen die Axen gegen die Grundflächen unter gleichen Winkeln geneigt seyn (§. 19.).

1. Zus. Wird ein Kegel mit einer, der Grundfläche parallel laufenden Ebene geschnitten, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis, durch dessen Mittelpunkt des Kegels Axe geht. Denn cb und CB, ce und CE laufen parallel (§. 12.) Daher verhält sich:

$$AC : Ac = CB : cb$$
$$AC : Ac = CE : ce$$

folglich $CB : cb = CE : ce$

Es ist aber $CB = CE$ (Eb. Geom. §. 24. Grunds.)

Also ist auch $cd = ce$. Dieses läßt sich von allen Durchschnittslinien eben so, wie von cb und ce beweisen. Folglich ist bed ein Kreis, dessen Mittelpunkt c ist.

2. Zus. Dieser Satz behält seine Richtigkeit, wenn die Axe auf der Grundfläche des Kegels nicht senkrecht steht. Das Verhältniß der Durchschnittsfigur zur Grundfläche aber ist, ihrem Umfange nach, dem Verhältnisse ihrer Halbmesser (§. E. G. §. 1243. 1.) oder ihrer Höhen, gleich (Zus. 1.); ihrem Flächeninhalte nach, aber doppelt so groß, als das Verhältniß der Quadrate ihrer Halbmesser (Eb. Geom. §. 142.) oder ihrer Höhen.

3. Zus. Bei ähnlichen Kegeln sind demnach die Seiten den Höhen, Halbmessern oder Umkreisen der Grundflächen proportional; die Quadrate der Seiten aber sind den Quadraten der Hö-

hen oder den Quadraten der Halbmesser der Grundflächen porportional.

§. 44. Aufg. Die Oberfläche eines senkrechten Kegels, ist so groß als ein Dreieck, dessen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche und dessen Höhe, der Seite des Kegels gleich ist.

Bew. Man stelle sich nach (§. 144 Zus. 1. Eb. Geom.) einen Kreisausschnitt vor, dessen Halbmesser = AD (Fig. 36.) und dessen Bogen = dem Umfange der Grundfläche des Kegels BEDB = DG ist, so ist dieser Kreisausschnitt = △ ADG. Legt man aber den Halbmesser des Ausschnittes auf AD, und wickelt den Kegel in denselben ein, so wird dieser Ausschnitt mit des Kegels Oberfläche zusammenfallen; folglich wird das △ ADG der Kegelfläche gleich seyn. — Setzt man also die Seite eines Kegels = S, den Halbmesser seiner Grundfläche = R, so ist die Kegelfläche $= 2R\pi \cdot \frac{1}{2}S = \pi RS$.

Anm. Die meisten Eigenschaften der Kegel und Pyramiden stimmen mit einander überein. Daher ist es nicht nöthig, auf dieselben wieder zurückzugehen, weil sie sich hinreichend aus den Lehrsätzen über die Pyramiden erklären lassen. Indeß ist doch die Berechnung der schiefen Kegelflächen einigen verwickelten Rechnungen unterworfen, die sich hier nicht erörtern lassen.

1. Zus. Die krumme Oberfläche eines abgekürzten geraden Kegels mit parallelen Grundflächen, ist einem Rechtecke gleich, dessen Höhe die Seite und dessen Grundlinie die halbe Summe der Umfangslinien der beiden Grundflächen des gedachten Kegels ist. In der erweiterten Ebene, des durch die Axe des Kegels geführten Dreiecks ABD (Fig. 36.), errichte man auf AD einen Perpendikel DG, dessen Länge dem Umfange der untern Grundfläche BEDB gleich ist, und setze diesen = P und bedb = p, ziehe AG und durch den Punkt d die dH parallel mit DG. Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich leicht übersehen.

Da $\triangle ACB \backsim Acb$ und $\triangle ADG \backsim AdH$ (E. G. §. 106.), so ist $AD:Ad = CD:cd$ (E G. §. 103.) u. $AD:Ad = DG:dH$ folglich $CD:cd = DG:dH$ oder

$CD:cd = BEDB:bedb = P:p$ (E G. §124. Z. 1.)

also $DG:dH = P:p$ Es ist aber das 1te Glied = dem 3ten, d. i. $DG = P$ nach der Verz., folglich $dH = p$. Nun stellt das rechtwinklige Dreieck ADG, dessen Flächeninhalt $DG \times \frac{1}{2} AD$ ist, die ganze Kegelfläche und eben so das $\triangle AdH$, dessen Flächeninhalt $dH \times \frac{1}{2} Ad$ ist, die oben abgeschnittene Kegelfläche, vor. Folglich ist die abgekürzte Kegelfläche dem Trapezium dDGH gleich, dessen Flächeninhalt, $dD \times \frac{1}{2}(dH + DG)$ beträgt. Also ist die abgekürzte Kegelfläche so groß, als $dD \times \frac{1}{2}(p + P) = dD(R + r)\pi$.

2. Zus. Zieht man durch die Mitte M der Seite dD, die MN der DG parallel, so kann man, wie oben beweisen, daß MN dem Umfange der mit BED parallelen Kreisfläche C gleich sey. Allein das Trapezium dDGH ist so groß, als $dD \times MN = dD \times C$. Daher ist die abgekürzte Kegelfläche so groß als ein Rechteck, dessen Höhe die Seite des Kegels und dessen Grundlinie der Umfang einer Kreisfläche ist, welche entsteht, wenn man den abgekürzten Kegel in gleichem Abstande von seinen Grundflächen, mit denselben parallel durchschneidet.

3. Zus. Nimmt man nun zwischen $AD = S$ und R eine mittlere geometrische Proportionallinie x so an, daß sich $S:x = x:R$ verhält, so ist $x^2 = SR$, $x^2\pi = \pi SR$. Beschreibt man also mit der gefundenen mittlern Proportionallinie einen Kreis, so muß dessen Flächenraum $= F$ seyn.

4. Zus. Die gesammte Oberfläche eines abgekürzten Kegels aber ist, wenn L die Kegelfläche, B die größere und b die kleinere Kreisfläche bezeichnet, $L + B + b$, d. ist. $= \pi(R + r)S + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi(R + r)S + \pi(R^2 + r^2) = \pi(R + r) + \pi(R^2 + 2Rr + r^2) - 2\pi Rr = \pi[(S + R) + r(R + r) - 2rR]$.

§. 45. Lehrs. Der körperliche Inhalt eines geraden Kegels ist so groß, als ein

gerader Cylinder, der mit dem Kegel auf einerlei Grundfläche steht und den dritten Theil seiner Seite zur Höhe hat. Denn der Kegel läßt sich als eine Pyramide von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten betrachten. Bezeichnet R den Halbmesser der Grundfläche, = BC, A die Höhe AC und B die Grundfläche eines Kegels, so ist $B = R^2\pi$ und der körperliche Inhalt K $= \frac{1}{3} A \times B = \frac{1}{3}\pi A R^2$.

§. 46. Aufg. Den körperlichen Inhalt eines abgekürzten Kegels, aus seiner Höhe und den parallelen Grundflächen zu finden.

Aufl. Wird die Höhe durch A, die untere Grundfläche des abgekürzten Kegels durch B, die obere durch b bezeichnet, so findet man aus (§. 36.) seinen körperlichen Inhalt $K = \frac{1}{3} A \left(\frac{B\sqrt{B} - b\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}\right)$ nun ist hier $B = R^2 A$ und $b = r^2 a$, folglich $\sqrt{B} = R\sqrt{\pi}$ und $\sqrt{b} = r\sqrt{\pi}$, also $K = \frac{1}{3} A \left(\frac{R^3\sqrt{\pi} - r^3\sqrt{\pi}}{R\sqrt{\pi} - r\sqrt{\pi}}\right)\pi = \frac{1}{3} A \left(\frac{R^3 - r^3}{R - r}\right)\pi$. Durch Reduction oder wirkliche Division findet man K $= \frac{1}{3} A\,(R^2 + Rr + r^2)\pi$.

Zus. Der letztere Ausdruck für K läßt sich auch auf folgende Art bezeichnen: $\frac{1}{3} A (R^2 + Rr + r^2)\pi = \frac{1}{3} A (R^2 + 2Rr + r^2 - Rr)\pi = \frac{1}{3} A (R + r)^2 - Rr)$.

Wählt man zur Berechnung den Durchmesser Statt des Halbmessers, d. ist. setzt man $R = \frac{1}{2}D$, so ist K

$$= \frac{1}{12} A \left(\frac{D^3 - d^3}{D - d}\right)\pi = \frac{1}{12} A \,(D+d)^2 - Dd)\pi.$$

c) Von den Kugelschnitten.

§. 47. Erkl. Eine Kugel ist ein Körper, der von einer Fläche so begrenzt wird, daß alle Punkte E, H, L ꝛc. (Fig. 30.) von einem innerhalb desselben befindlichen Punkte C gleich weit entfernt sind. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt; die begrenzende Fläche, die Oberfläche der Kugel, jede Entfernung AC vom Mittelpuncte C bis an die Oberfläche CE, ein Halbmesser, und jede in A durch C bis an D gezogene gerade Linie, ein Durchmesser der Kugel.

Anm. Man kann sich auch vorstellen, die Kugel entstehe durch die Umdrehung des Halbkreises ALD um seinen Durchmesser AD; denn die, durch diese Bewegung des Halbkreises beschriebene Oberfläche ist so beschaffen, daß alle Punkte auf derselben von dem Mittelpunkte C gleich weit entfernt sind.

Zus. Also sind alle Halbmesser und Durchmesser einer Kugel einander gleich.

Man kann die Kugel vermittelst einer Ebene durchschneiden, und dieser schneidenden Ebene in Hinsicht auf die Kugel, jede beliebige Lage geben.

Geht nun eine an sich unbegrenzte Ebene durch die Kugel, so kann man

1) auf denjenigen Theil sehen, welchen sie mit der Kugel gemein hat und der in derselben enthalten ist; 2) auf denjenigen, der ganz ausserhalb der Kugel liegt; 3) auf die Grenzlinie, welche beide Größen, die Ebene und die Kugel, mit einander gemein haben.

§. 48. **Lehrs. Jeder Kugelschnitt gibt einen Kreis, die schneidende Ebene mag durch den Mittelpunkt gehen oder nicht.**

Bew. Gehet die schneidende Ebene (Fig. 30.) durch den Mittelpunkt C, so ist die Figur ein Kreis, weil alle gerade Linien CA, CB, CD vom Mittelpunkte ausgehen und zugleich in der Oberfläche der Kugel liegen. Gehet die schneidende Ebene EFHE nicht durch den Mittelpunkt C, so fälle man aus demselben auf die Ebene den Perpendikel CG. Nun ziehe man aus C die geraden Linien CE, CF, CH ꝛc. so sind selbige einander gleich (§. 38. Zus. .), die Dreiecke CGE, CGF, CGH rechtwinklig und daher ist $GE = \sqrt{(CE^2 - CG^2)}$ und $GF = \sqrt{CF^2 - CG^2)}$ (E.G.§63 Z 4 N.3.) und aus eben den Gründen ist $GF = GH$, folglich ist die Umfangslinie der Durchschnittsfigur in beiden Fällen ein Kreis.—Jene heißen größte Kreise, sind alle einander gleich und theilen die

Kugel in zwei gleiche Theile; diese aber nennt man kleinere Kreise.

Zus. Kugelschnitte in gleichen Entfernungen EH, EK vom Mittelpunkte (Fig. 31.), sind einander gleich. Die andern aber werden immer kleiner, je weiter die schneidende Ebene von dem Mittelpunkte entfernt ist. Zwei größte Kreise einer Kugel aber theilen selbige sowohl in Hinsicht ihrer Oberfläche, als ihres körperlichen Inhaltes in zwei gleiche Theile.

§. 49. Wenn man durch den Mittelpunkt C eines größten Kreises (Fig. 30.) eine gerade Linie Pp senkrecht errichtet und selbige bis an die Kugelfläche verlängert, so heißt sie die Axe, ihre Endpunkte P und p aber die Pole dieses Kreises. Diese Benennungen gelten auch für alle Parallelkreise der ABD, d. h. derjenigen Kreise, deren Ebenen mit ABD parallel laufen.

Zus. Hieraus folgt, daß alle Punkte eines Kreises (Fig. 32.) ADBE, von dessen beiden Polen gleich weit entfernt sind. Denn die Entfernungen sind die Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke, deren gleichnahmige Catheten einander gleich sind.

Anm. Die Lehren der vorhergehenden §§. beziehen sich vornehmlich auf folgende Stücke: 1) auf die Pole eines Kreises; 2) auf seine Axe; 3) auf seinen Mittelpunkt; 4) auf die mit ihm parallellaufenden Kreise,

worunter auch ein größter seyn kann, und 5) auf den Mittelpunkt der Kugel. Diese sechs Stücke (die beiden Pole eines Kreises sind als zwei verschiedene Punkte anzusehen,) stehen mit einander in einer solchen Verbindung, daß aus zwei derselben, die vier übrigen allemahl bestimmt werden können.

§. 50. Lehrs. Ein größter Kreis, der auf einem andern größten Kreise senkrecht steht, geht durch dessen Pole und seine Ebene durch dessen Axe.

Bew. Es sey APDpA (Fig. 30.) ein größter Kreis, der auf einem andern wie ABDA senkrecht stehe, so errichte man aus dem Mittelpunkt C und zwar auf CA die senkrechte Linie CP, so ist sie auch auf der Ebene des Kreises ABD senkrecht (§. 7. Z. 1.) und weil CP aus dem Mittelpunkt des Kreises ABD, errichtet worden ist, so ist ihr Endpunkt der Pol des Kreises ABD. Nun läuft der Kreis PEp durch den Punkt P, folglich geht er durch den Pol des Kreises ABD.

Zus. Ein größter Kreis APDpA (Fig. 30.) der durch die Pole des andern ABDA geht, steht auf demselben senkrecht. Denn errichtet man aus dem Punkte C ihres gemeinschaftlichen Durchschnittes AD die beiden senkrechten Linien CA und CP, deren eine in der Ebene ABD, die andere in der Ebene APD liegt, so ist ACP der Neigungswinkel

beider Kreisflächen (§. 5). Dieser Neigungswinkel ACP ist = R, daher stehen die beiden Kreisflächen auf einander senkrecht.

2. Zus. Der Durchschnittspunkt P zweier Bogen größter Kreise PDp und PEp, welche auf einem dritten senkrecht stehen, ist der Pol des Bogens DE. Denn ihr Durchschnitt steht senkrecht auf der Ebene des dritten Kreises durch DCE und geht zugleich durch C, folglich ist der Endpunkt P der Pol des Bogens DE.

3. Zus. Die Bogen PE, pE eines größten Kreises, welches auf einem andern senkrecht steht, ist = R.

4. Zus. Der Pol eines größten Kreises ist von allen Punkten desselben um 90° entfernt. Daher kann man auch den zu einem größten Kreise gehörigen, auf der Kugelfläche befindlichen Pol, wie auch umgekehrt den zu einem Pole gehörigen Kugelkreis leicht finden.

§. 51. Erkl. Unter einem sphärischen Winkel versteht man allemahl denjenigen, welchen zwei Bogen größter Kreise auf der Oberfläche, an ihrem Durschnittspunkte, einschließen. Daher heißt der Scheitelpunkt und die von ihm anfangenden Bogen, die Schenkel des sphärischen Winkels. In (Fig. 33.) ist der Winkel EPD, welchen die Bogen

PE und PD größter Kreise an der Spitze P einschließen, ein sphärischer Winkel, P ein Scheitelpunkt und PD und PE sind seine Schenkel. Jeder sphärische Winkel ist daher so groß als der geradlinige, welchen die Tangenten der Schenkel an dem Scheitelpunkte des sphärischen Winkels mit einander einschließen.

e) Von der Kugel, ihren Aus- und Abschnitten.

§. 52. Die Kugelfläche ist vier Mahl so groß, als einer ihrer größten Kreise.

Bew. Drehet man das reguläre in oder um den Kreis AEX beschriebene Polygon um die Axe AX, so erzeuget jede Seite tu des Polygons einen abgekürzten Kegel, dessen krumme Oberfläche tu.p ist, wenn p der zum Halbmesser Kw, welcher auf AX senkrecht steht, gehörige Kreisumfang ist. Auf diese Art findet man nun sehr leicht, die durch das Polygon erzeugte Oberfläche. Ist nun ou der Axe AX parallel, so sind die beiden Dreiecke tou und KwC einander ähnlich, folglich verhält sich tu : uo = CK : Kw = P : p, wenn P den zum Halbmesser CK gehörigen Kreisumfang bezeichnet. Daher ist die durch den abgekürzten Kegel erzeugte krumme Oberfläche p.tu = P.ou. So ist auch die durch die Umdrehung von Tt erzeugte Cylinderfläche = Tt.P. Die von ou

beschriebene Kegelfläche aber ist $\frac{1}{2}$UO, mit dem zum UV gehörigen Kreisumfange multiplicirt. Ziehet man aber von dem Mittelpunkte C nach der Mitte von UO den Halbmesser, so entstehet aus den ähnlichen Dreiecken die Proportion $\frac{1}{2}$UO : OV = wie der zu UO gehörige Umfang zu p. Hieraus gehet nun hervor, daß die durch die Summe der Seiten des regulären Polygons vermittelst der Umdrehung erzeugte Oberfläche so groß sey, als der von dem Polygon umschriebene Kreis p multiplizirt mit der Summe aller Höhen, welche den Durchmesser AX = 2r zusammen setzen. Durch die Vervielfältigung der Zahl der Seiten des gedachten Polygons nähert man sich dem Umkreise, wie die Polyederfläche der Kugelfläche, und da die Theilung des Polygons unbegrenzt fortgeführt werden kann, so muß in dieser Voraussetzung die Oberfläche des Polyeders mit der Kugelfläche F zusammenfallen. Daher ist F = 2rp, oder wenn man p aus dem Halbmesser ausdruckt $F = 4r^2\pi = d^2\pi$.

Hieraus lassen sich nun nachstehende Folgerungen übersehen: 1) die krumme Oberfläche eines Kugelabschnittes, d. h. desjenigen Kugelstückes, welches vermittelst einer Ebene von der Kugel abgeschnitten wird, wird gefunden, wenn man einen größten Kugelkreis p mit der Höhe desselben h multiplicirt, und einer Zone, d. h. eines zwischen zwei Paral-

lelebenen enthaltenen Stückes, wenn man p mit dem senkrechten Abstande beider Ebenen h′ multiplicirt.

2) Die krumme Oberfläche eines um die Kugel beschriebenen geraden Cylinders, dessen Grundfläche ein größter Kugelkreis ist, ist der Oberfläche dieser Kugel gleich.

3) Die Kugelflächen S und s von verschiedenen Halbmesser CG und CA, verhalten sich wie die Quadrate dieser Halbmesser, d. i. $S:s = CG^2:CA^2$. Ist CG = 4AC, so ist die erste Kugelfläche 16 Mahl größer als die andere. Gesetzt nun, der Halbmesser der einen Kugel sey $1\frac{1}{2}'''$ und der andere 8″ Duod., so verhält sich jene Kugelfläche zu dieser wie $(1\frac{1}{2})^2:108 = 9:4 \cdot 108 = 1:4 \cdot 12 \cdot 108 = 1:5184$.

4) Den Halbmesser einer Kugel, deren Oberfläche S gegeben ist, findet man $= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{\pi}S\right)} = 0{,}282095\sqrt{S}$. — Ist z. B. die Oberfläche einer Kugel, d. i. S = 868624 Q. Z., so ist $r = 0{,}282095\sqrt{868624} = 262{,}91254$.

§. 53. Der körperliche Inhalt einer Kugel ist gleich dem dritten Theile des Produktes aus der Oberfläche in den Halbmesser derselben.

Bew. Man kann sich vorstellen, die Kugelfläche

wäre aus einer unendlichen Menge unendlich kleiner Figuren etwa Dreiecke b, b′, b″ 2c. zusammengesetzt, auf welche von dem Mittelpunkte C senkrechte Linien CD, CK 2c. herabgelassen wären, so füllen diese Pyramiden von gleicher Höhe und Grundfläche, welche mit der Kugelfläche zusammenfallen, den körperlichen Raum der Kugel aus. Jede Pyramyde aber ist so groß als $\frac{1}{3}r$ Mahl der Grundfläche, ihre Summe $= \frac{1}{3}r \times (b + b' + b'' + b''' + .)$ Nun ist die Summe von $b + b' + b'' + \ldots$ die Kugelfläche F, also ist der körperliche Inhalt der Kugel $K = \frac{1}{3}F = \frac{1}{3}r \cdot 4r^2\pi$ $\frac{4}{3}r^3\pi$ und für $r = \frac{1}{2}d$, ist $\frac{1}{6}d^3\pi$. — Daher findet man auch aus K den Werth von $D = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}}\sqrt[3]{K}$ $= 1,2407009817 98\sqrt[3]{K}$.

Anm. Kugeln von ungleichen Halbmessern kann man nach ihrem körp. Inhalt leicht vergleichen. Wie groß ist der Durchm. einer Kugel, deren Inh. K=549 957165057″ beträgt? — 8,193″ — Der Durchmesser einer 3pfünd. Kugel ist 2,75″ Rhländ., wie groß ist der Durchmesser einer 6pfünd.? — 3,48″.

Der Cubikinhalt einer Zone, worin der Kugel Mittelpunkt nicht ist, ist $K = \frac{1}{6}\pi a(3r^2 + 3\varrho^2 + a^2)$. Liegt aber C in der Grundfläche, so ist $k = \frac{1}{6}\pi a(3r^2 - a^2)$. Für $\varrho = 0$, erhält man den Abschnitt (Fig. 38.) $= \frac{1}{6}\pi(3r^2 + a^2)$.

Ein Kugelausschnitt ist $\frac{2}{3}$ Cub., welcher einen größten Kugelkreis zur Grundfläche und mit dem Abschnitt gleiche Höhe hat.

Beisp. Setzt man nun bei der Berechnung des körperlichen Inhalts einer Zone, worin der Mittelpunkt der Kugel nicht enthalten ist, den Halbmesser der untern Grundfläche, $= r = 9'$, der obern $= \varrho = 7$ und ihren senkrechten Abstand, $a = 2'$, so ist $K = \frac{1}{6} . 3,1415926 . 2(3 . 9^2 + 3 . 7^2 + 2^2) = \frac{1}{6} . 3,14 . . 2(243 + 147 + 4) = 412,595775$ C. F.

Fällt aber der Mittelpunkt der untern Grundfläche mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammen und setzt man ihren Halbmesser $r = 12'$ und $a = 3'$, so ist $K = \frac{1}{6}\pi a(3r^2 - a^2) = \frac{1}{3} . 3,14 . . 3(3 . 12^2 - 3^2) = 1328,893627$. Für $\varrho = 0$ erhält man, wenn $r = 8$, $a = 4$ ist, den Abschnitt $\frac{1}{6}\pi a(3r^2 + a^2) = \frac{1}{6} . 3,14 . . 4(3 . 8^2 + 4^2) = 435,634118$.

§. 54. Eine Kugelfläche kann auch als ein Rechteck berechnet werden, dessen Grundlinie einem größten Kugelkreise und dessen Höhe dem vierten Theile seines Durchmessers gleich ist. Aehnliche Bestimmungen finden bei der Halbkugel, den Zonen ꝛc. Statt. Denn die Oberfläche eines Kugelabschnittes APB (Fig. 31. Körperl.) oder einer Zone (ADHE Fig. 30.) ist dem Umfange eines größten Kugelkreises APDE, multiplicirt in die Höhe des Abschnittes HP, oder in die Höhe der Zone CG ꝛc. gleich.

§. 55. Auch lassen sich die bisher betrachteten geometrischen Körper durch Rechnung leicht in andere

verwandeln, wenn die eine oder die andere der Abmessungen jener Körpergattungen gegeben sind. Man nehme z. B. an, eine Kugel soll in einen Cylinder von gegebener Höhe h verwandelt werden, so kommt es hier nur darauf an, den Halbmesser der Grundfläche x zu finden. Es ist demnach $\frac{4}{3}r^3\pi = x^2\pi h$ (§. 53. und §. 37.), woraus $x^2 = \frac{4r^3}{3h}$, also $x = \sqrt{\frac{4r^3}{3h}}$ folgt. Soll hingegen ein Kegel von der Höhe h in eine Kugel verwandelt werden, so darf man nur deren Halbmesser aufsuchen. Es ist aber $\frac{4}{3}x^3\pi = \frac{1}{3}hr^2\pi$ oder $4x^3 = hr^2$, also $x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}hr^2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2hr^2}$. Soll eine Kugel von bekanntem Durchmesser d in einen Würfel, dessen Seite x seyn mag, verwandelt werden, so ergibt sich hieraus die Gleichung $\frac{1}{6}d^3\pi = x^3$, folglich ist $x = \sqrt[3]{\frac{1}{6}d^3\pi} = d\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi} = d \cdot 0{,}523598775$.

Soll durch Rechnung ein Würfel gefunden werden, welcher 2, 3 . . nmahl größer ist, als ein gegebener, und bezeichnet x die Seite des erstern, a die Seite des andern, so ist $x^3 = na^3$, folglich $x = a\sqrt{n}$. — Delisches Problem.

Ist der Durchmesser einer Kugel $= d$, so ist der Durchmesser einer 2, 3, 4 . . nmahl größern Kugel $= \sqrt[3]{2}$, $d\sqrt[3]{3}$, $d\sqrt[3]{4}$ . . $d\sqrt[3]{n}$ (§. 53.). Theilt man also den Durchmesser einer gegebenen Kugel in 1000 gleiche Theile, so ist der Durchmesser einer

2, 3 . . nmahl größern Kugel $= 1000\sqrt[3]{2}$; $1000\sqrt[3]{3}$ $1000\sqrt[3]{4}$ . . d. i. 1260; 1442; 1587 ꝛc. Aehnliche Verwandlungen und Berechnungen können mit allen oben betrachteten Körpern leicht vorgenommen werden.

e) Von der Berechnung der Kugelhaufen.

§. 56. Kugeln von gleichem Durchmesser lassen sich in Haufen aufstellen, welche von oben nach unten regelmäßig zunehmen und die Gestalt gleichseitiger, drei- oder viereckiger Pyramiden oder anderer ähnlichen Körper annehmen. Die unterste Schicht dieser Kugelhaufen an der Erdfläche ist entweder ein gleichseitiges Dreieck, oder ein Quadrat, oder ein Rechteck.

§. 57. In einem aus x Schichten bestehenden Kugelhaufen von pyramidalischer Gestalt, dessen Seite der untersten quadratförmigen Grundlage x Kugeln enthält, ist die Anzahl aller Kugeln $z =$

$$\frac{x \, . \, x+1 \, . \, 2x+1}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, .} = \frac{x \, . \, x+1 \, . \, x+x+1}{1 \, . \quad 2 \, . \quad 3 \, .} =$$

$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$.

Die horizontalen Kugelschichten gehen in quadratförmiger Gestalt von oben nach unten in folgender Ordnung fort: 1^2, 2^2, 3^2, 4^2 . . x^2, ihre quadratförmige Gestalt läßt sich durch Punkte leicht darstellen; ihre Summe ist $z = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots (x-1)^2 + x^2$. Diese Summe kann

man mit Hülfe der unbestimmten Coefficienten in folgenden Ausdruck $Px^3 + Qx^2 + Rx$ zusammen fassen. Die Folge der Schlüsse wird die Unrichtigkeit dieser Annahme entweder entdecken oder ihre Richtigkeit bestätigen. In dieser Voraussetzung muß die Summe der um 1 höher steigenden Reihe der Quadrate $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots x^2 + (x+1)^2 = P(x+1)^3 + Q(x+1)^2 + R(x+1)$ seyn. Es ist aber die Differenz von $P(x+1)^3 + Q(x+1)^2 + R(x+1) - (Px^3 + Qx^2 + Rx) = 3Px^2 + 3Px + P + 2Qx + Q + R = x^2 + 2x + 1$. Diese Gleichung entsteht dadurch, daß man weiß, daß wenn die Summe der ersten Reihe von der Summe der andern abgezogen wird, das $x+1$te Quadrat als Rest bleiben muß. Ordnet man nun diese Gleichung nach den Potenzen von x, so findet man

$$3Px^2 + (3P + 2Q)x + P + Q + R = x^2 + 2x + 1$$

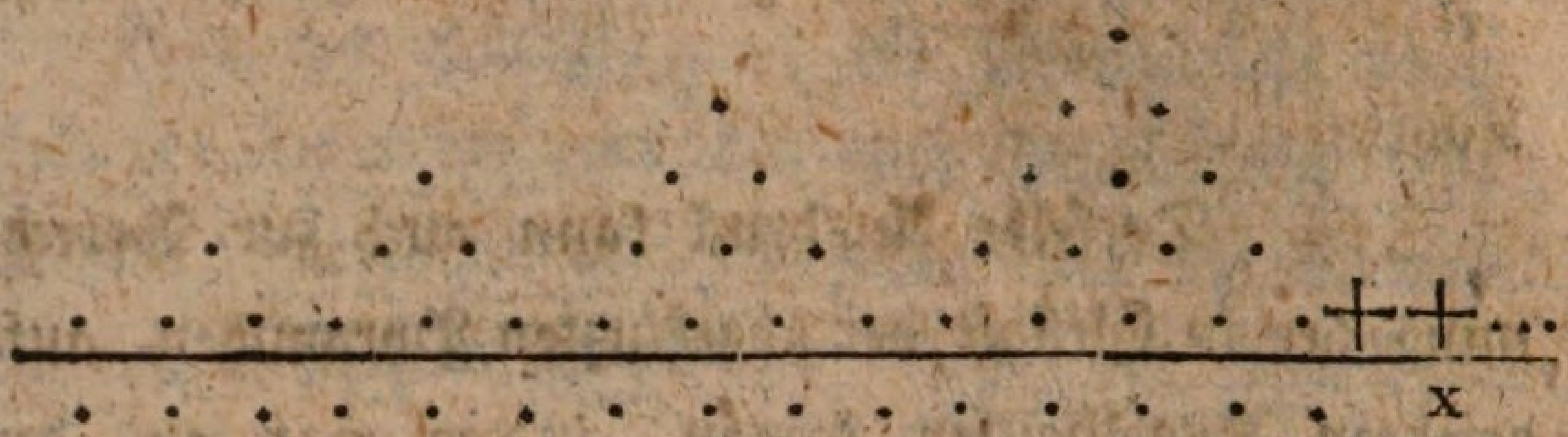
Stellt man nun die Coefficienten von den gleichnahmigen Potenzen nach (§. 104. S. 284.) zusammen, so gibt $3P = 1$; $3P + 2Q = 2$ und $P + Q + R = 1$. Also ist $P = \frac{1}{3}$; $2Q = 1$, oder $Q = \frac{1}{2}$ und $R = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Daher ist $Px^3 + Qx^2 + Rx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$, oder $z = \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6} = \frac{x \cdot \overline{x+1} \cdot \overline{2x+1}}{6}$. Hielt z. B. die unterste Grund-

Zeile 15 Kugeln, so sind im ganzen Haufen $\frac{15 \cdot \overline{15+1} \cdot \overline{30+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{6} \cdot 15 \cdot 16 \cdot 31 = 1240$ Kugeln.

Zus. Derselbe Ausdruck kann auch zur Berechnung der in Gestalt der abgekürzten Pyramiden, aufgesetzten Kugelhaufen dienen, indem man aus der Zahl der Kugeln in der untersten und obersten Schicht, zwei Pyramiden berechnet und alsdann die fehlende von der ganzen abzieht. Fände man z. B. in der untersten Schicht 15, in der obersten 9 Kugeln, so würde oben eine aus 8 Schichten bestehende Pyramide fehlen. Jene enthält 1240, diese 204, die aufgestellte Pyramide also 1036 Kugeln. Ist aber die Kugelzahl in der Seite x einer viereckigen Grundfläche obiger Art = 24 und in der obersten Lage = 12, so fehlt eine Pyramide, deren Seite in der untern Grundfläche 11 beträgt. Daher ist $z = 4900 - 506 = 4394$.

§. 58. In einem aus x Schichten bestehenden Kugelhaufen von pyramidalischer Gestalt, dessen unterste Schicht ein Dreieck von x Kugeln in jeder Seite enthält, ist die Anzahl aller Kugeln $z = \frac{x \cdot \overline{x+1} \cdot \overline{x+2}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

Denn die Kugelschichten nehmen von oben nach unten in folgender Gestalt zu:



Jedes dieser Dreiecke stellt die Gestalt der horizontalen Schichten und die Anzahl der darin befindlichen Kugeln vor, so, daß auf das oberste Dreieck nur eine Kugel gelegt wird. Die Anzahl der Kugeln in einem jeden Dreiecke ist die Summe einer mit Eins anfangenden, in der Ordnung der natürlichen Zahlen fortschreitenden arithmetischen Reihe, deren letztes Glied die Seitenzahl des Dreieckes ist. So enthält also das

1ste Dr. die Summe der Zahlen von 1 bis 2, das
2te Dr. die Summe der Zahlen von 1 bis 3, das
3te Dr. die Summe der Zahlen von 1 bis 4, das

.
.
.

xte Dr. die Summe der Zahlen von 1 bis x. Daher ist die Kugelzahl in der xten Schichte, $= \frac{(1+x)x}{2}$ $= \frac{1}{2}(x+x^2)$ (§. 100. Allg.) Schreibt man nun nach und nach in diesen Ausdruck der Kugeln, die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4..., so findet man die Summe der in

jeder horizontalen Lage befindlichen Dreiecke. In der

1ten ist sie $= \frac{1}{2}(1+1^2)$, in der
2ten : : $= \frac{1}{2}(2+2^2)$, in der
3ten : : $= \frac{1}{2}(3+3^2)$, in der
4ten : : $= \frac{1}{2}(4+4^2)$, in der
.
.
.
xten : : $= \frac{1}{2}(x+x^2)$. Setzt man nun die vertical unter einander geschriebenen Zahlen zusammen, so besteht die ganze Summe aus 2 Reihen. Die erste ist die halbe Summe einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied = der Differenz = 1 und deren Anzahl der Glieder $= x$ ist. Diese beträgt also $\frac{1}{2}(1+x)x$. Die andere besteht aus der halben Summe aller Quadratzahlen, die von 1 anfangen und bis x fortgehen, nehmlich aus $\frac{1}{2}(1+2^2+3^2+4^2\,..\,x^2.)$ Diese Reihe wird nach dem vorhergehenden §. gefunden und ist $= \frac{1}{6}.(x.x+1.2x+1)$. Beide Reihen zusammen sind also $= \frac{1}{2}(x.x+1)+\frac{1}{6}(x.x+1.2x+1)$
$= x.x+1\left(\frac{3}{6}+\frac{2x+1}{6}\right) = x.x+1.(2x+4)\frac{1}{6}$
$= \frac{1}{3}x.x+1.x+2$. Nimmt man nun hiervon die Hälfte, so ist $z = \frac{x.x+1.x+2}{6}$. Hieraus ergiebt sich zur Berechnung der oben erwähnten Kugelhaufen folgende Regel: Man zählt die in

einer Seite der Grundfläche liegenden x zusammen und nehme den 6ten Theil eines aus 3 auf einander folgenden Faktoren x, $x+1$, $x+2$ bestehenden Produktes, deren erster, die gefundene Zahl x ist. Diese Ausdrücke für die Tri- und Tetragonalpyramidalzahlen unterscheiden sich von einander bloß dadurch, daß hier zum dritten Faktor, die um eins vermehrte doppelte Seitenzahl, d. h. $2x+1$ genommen wurde. Wäre z. B. die Seitenzahl der Grundfläche $x = 24$, so ist $z = \frac{24 . 24+1 . . 24+2}{6}$ $= 4 . 25 . 26 = 2600$.

Zus. Hieraus läßt sich nun wieder leicht beurtheilen, wie groß die Anzahl solcher Kugeln in einer bis auf eine gewisse Höhe geschichteten dreieckigen Pyramide sey. Denn man darf nur von der ganzen Pyramide, das unvollendete Stück, welches aus der Seitenzahl der obersten Lage, nach derselben Regel als eine Pyramide berechnet wird, abziehen, so zeigt der Rest die Anzahl der in der abgekürzten Pyramide befindlichen Kugeln an.

§. 59. Oft werden Kugeln in den Zeughäusern zeltförmig, d. h. in langen Haufen aufgestellt, daß die unterste Schicht desselben (man vergleiche Fig. 29. Körperl.) ein Rechteck ABFD, der Rücken

oder die oberste Linie CE = k eine einfache Reihe von Kugeln ausmacht. Sind alsdann die beiden Abmessungen des Rechteckes, nach dessen Länge AD und Breite DF durch u und x gegeben worden, so kann man sich einen solchen Kugelhaufen in Gedanken, in zwei andere zerlegt, vorstellen, nehmlich in eine gleichseitige viereckige Pyramide EDFHG, deren Kugelzahl in der Seite der Grundfläche x ist; und in einen andern, welcher entsteht, indem man an die eine Seitenfläche der Pyramide eine Kugelschicht in Gestalt eines Dreieckes KGH anlehnt, dessen oberster Theil eine Kugel ausmacht, jede folgende Reihe eine mehr und die unterste, welche der Seitenlinie DE gleich ist, x Kugeln enthält und alsdann dieses Geschäft u — x mahl wiederholt. Daher besteht der erste Theil des ganzen Haufens z, aus $\frac{x.x+1.2x+1}{1.2.3}$ und der andere aus $\frac{1}{2}(1+x)x.(u-x)$ Kugeln, deren Summe z also $\frac{x.x+1.2x+1.+3x.x+1.u-x}{6}$ beträgt. Dieser Ausdruck gibt $z =$

$$\frac{x.x+1.(2x+1+3u-3x)}{1.\ 2.\ 3.} = \frac{x.x+1.3u-x+1}{1.\ 2.\ 3}$$

$$= \frac{x.x+1.3u-(x-1)}{1.\ 2.\ 3}.$$ Es ist daher in einem solchen Haufen, die Kugelzahl z dem sechsten

Theile eines aus 3 Faktoren bestehenden Produktes gleich, deren erster die Breite x, der andere die nächstfolgende ganze Zahl x+1 und die dritte, die dreifache Länge, weniger der um 1 verminderten Breite, beträgt. Wollte man zu einem solchen Kugelhaufen x = 12 und u = 21 nehmen, so ist z = $\frac{12 \cdot 13 \cdot 52}{2 \cdot 3} = 1352$.

1. Zus. Wären die oberste Zeile CE = k und die Seitenlinie DE = x gegeben, so läßt sich hieraus der Werth von u leicht finden, indem über der untersten Zeile x − 1 Reihen liegen. Daher ist u = k + x − 1.

2. Zus. Wird x = u, so ist k = u − x + 1 = 1, wodurch der zeltförmigen Haufen in eine vierseitige Pyramide verwandelt wird.

3. Zus. Schreibt man in die obige Gleichung den in (Zus. 1.) angeführten Werth von u, so erhält man dadurch einen Ausdruck, vermittelst dessen man den Kugelhaufen aus der kürzern und der obersten Zeile berechnen kann. Denn in diesem Falle ist $z = \frac{x \cdot x+1 \cdot 3k+2x-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. In dem vorigen Beispiele ist k = 21 − 12 + 1 = 10, folglich z = $\frac{12 \cdot 13 \cdot 30+24-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1352$.

§. 60. Die bisher berechneten Kugelhaufen, lassen sich auf verschiedene Arten verbinden, und nach einiger Betrachtung wird man sich leicht die aus der Zusammensetzung herzuleitenden Regeln, zu ihrer Berechnung entwerfen können. Schließen sich an einen länglichen Kugelhaufen, drei- oder vierseitige Pyramiden an, so wird jede obere Schicht in der Länge, jede zunächst liegende untere aber in der Breite eine Kugel mehr enthalten, so daß mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnung $u + x - 1 = k$, d. h. der Anzahl der Kugeln im Rücken und $u = k + 1 - x$ die Anzahl der Kugeln in der untersten Zeile ist. Daher man sich wieder den ganzen Haufen in zwei Haupttheile zerlegt, vorstellen kann. Der erste besteht aus $u - 1$ Schichten, deren jede $\frac{1}{2} x . x + 1$ Kugeln enthält und daher ist die Summe aller Kugeln in diesem Theile $\frac{1}{2}(x . x + 1 . u - 1)$. Der andere ist eine dreieckige Pyramide, welche aber eine solche Lage erhalten hat, daß sie auf der Eckseite ruhet, deren Inhalt also $\frac{1}{6} x . x + 1 . x + 2$ ist (§. 58.). Die in beiden Theilen zusammen enthaltene Menge von Kugeln ist daher $\frac{1}{6} x . x + 1 . x + 2 . + \frac{1}{2} . x . x + 1 . u - 1 =$

$$x . x + 1 \left(\frac{x + 2}{6} + \frac{u - 1}{2}\right) = x . x + 1 . \frac{x + 2 + 3u - 3}{6}$$

$= \frac{1}{6} x . x + 1 . 3u + x - 1$. Will man den Kamm des Haufens in Rechnung bringen, so setzt man $u =$

$k - x + 1$ dadurch erhält man für z die Summe der Kugeln im ganzen Haufen $\frac{1}{6}.x.x+1.3k-2x+2$. Ist z. B. der Rücken $k = 40$ und die Eckseite $x = 12$, so ist $z = 2548$.

Zus. Ist der zeltförmige Haufen nur auf einer Seite an eine Pyramide gelegt, so ist die darin enthaltene Menge von Kugeln $z = \frac{1}{2}k.x.x+1$.

§. 62. Soll aber eine gegebene Anzahl von Kugeln, pyramidenförmig und zwar so aufgestellt werden, daß die unterste Schicht ein gleichseitiges Dreieck ausmacht, so kann man die obige Formel $z = \frac{1}{6}.x.x+1.x+2$ dabei zum Grunde legen. Diese führt zur Auflösung einer kubischen Gleichung. Da aber z eine gegebene ganze positive Zahl ist, so kann man die Wurzeln entweder durch Aufsuchung derjenigen Faktoren bestimmen, welche die auf o reducirte Gleichung verschwinden lassen, wenn man die Wurzeln anstatt x in die Gleichung setzt; oder man kann selbige durch Ausziehung der Cubikwurzel finden. Denn die Formel $\frac{1}{6}.x.x+1.x+2 = z$ gibt $x^3+3x^2+2x = 6z$. Nimmt man nun die Würfelzahlen von x und $x+1$, so ist jene x^3 und diese x^3+3x^2+3x+1. Hieraus gibt sich zu erkennen, daß der Werth von $6z$ größer ist als die Würfelzahl von x und kleiner als die Würfelzahl von $x+1$; folglich ist auch $x < \sqrt[3]{6z}$ und $x+1 > \sqrt[3]{6z}$ oder

$x > +\sqrt[3]{(6z)} - 1$. Aus diesen Betrachtungen folgt, daß man die Wurzel x, d. h. die Seite der untersten Schicht oder Grundzeile finden könne, wenn man die gegebene Kugelzahl, mit 6 multiplicirt, aus dem Produkt die Cubikwurzel in ganzen Zahlen auszieht und diesen Werth anstatt x in die gegebene Gleichung setzt. Sollten nun z. B. 2304 Kugeln pyramidenförmig und zwar so aufgestellt werden, daß die unterste Schichte ein gleichseitiges Dreieck wird, so ist $x = \sqrt[3]{6.2304} = \sqrt[3]{13824} = 24$ und $\frac{1}{6}.24.25.26 = 2304$. Ist aber der gegebene Cubus keine Rationalzahl, so wird $\frac{1}{6}x^3 + 3x^2 + 2x$ entweder kleiner oder größer als 6z gefunden werden. In beiden Fällen wird die gegebene Menge von Kugeln sich nicht vollkommen genau in eine Pyramide zusammenstellen lassen, und es werden also einige Kugeln daran fehlen oder dabei übrig bleiben. Will man aber doch im ersten Fall einen pyramidenförm. Kugelhaufen haben, so darf man nur die gefundene Cubikwurzel um 1 vermindern. Sollten also 2028 Kugeln in der gedachten Art aufgesetzt werden, so ist $x = \sqrt[3]{6.2028} = \sqrt[3]{12168} = 23$. Nun ist $\frac{23.24.25}{6} = 2300$. Daher nimmt man $x = 22$ und alsdann ist $\frac{22.23.24}{6} = 2024$, wo also 4 übrig bleiben.

§. 62. Auf eine ähnliche Art bestimmt man auch die Grundzeile des Quadrats der gleichseitigen vier-eckigen Pyramiden. Denn aus $z = \frac{1}{6}.x.x+1.2x+1$ ergibt sich $3z = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$, folglich ist $x < \sqrt[3]{3z}$ und $(x+1) > \sqrt[3]{3z}$. Dieses Resultat führt zu ei-nem, dem vorigen ganz ähnlichen Verfahren und man kann für x, d. i. für die Seite der untersten Lage, die gefundene Kubikwurzel unmittelbar, oder ihren um 1 verminderten Werth brauchen.

§. 63. Sollte aber ein Kugelhaufen zeltförmig aufgestellt werden, daß die Grundfläche ein Rechteck und die oberste Schicht eine einzige Zeile von Kugeln ausmacht, so muß man bemerken, daß in der Glei-chung $\frac{1}{6}.x.x+1.3u-x+1=z$ zwei unbekannte Größen x und u vorkommen und daß also die hier aufzulösende Aufgabe unbestimmt sey. Man muß daher die eine Abmessung der Grundfläche etwa x nach Umständen annehmen und dann den Werth von u aus Rechnung bestimmen, welches durch eine ein-fache Gleichung vom ersten Grad geschehen kann. Wollte man u als bekannt annehmen, so würde die Bestimmung von x die Auflösung einer kubischen Gleichung nöthig machen. Nimmt man also nach der vorigen Bemerkung $x=a$, d. h. als bekannt an,

so wird $\frac{x.x+1.3u-x+1}{1.2.3} = \frac{1}{6}.x.x+1.3u-x+1$

$= 3x^2u - x^3 + 3ux + x = 6z$ oder $3a^2u - a^3 + 3au + a = 6z$, folglich ist $u = \frac{6z + a^3 - a}{3(a^2 + a)} = \frac{2z}{a(a+1)} + \frac{1}{3}(a-1)$. Erhält man auf diese Art für u eine ganze Zahl, so setzen die gegebenen Kugeln einen solchen Haufen vollkommen genau zusammen. Tritt dieser Fall aber nicht ein, so muß man für x eine schickliche Zahl annehmen und u daraus berechnen; nur werden sich alsdann nicht sämmtliche Kugeln in den Haufen aufnehmen lassen. Wäre z. B. die gegebene Anzahl von Kugeln, d. i. $z = 2560$, und nehme man $x = 15$ an, so ist $u = \frac{2.2560}{15.15+1} + \frac{14}{3} = \frac{64+14}{3} = 26$. Nimmt man aber $x = 12$ an, so bekommt man für u einen Bruch und nach geschehener Aufstellung wird man einige Kugeln übrig behalten.

Bestimmt man diesen Werth aus k, so erhält man $3ka^2 + 2a^3 + 3ka - 2a = 6z$. Hieraus findet man $k = \frac{6z + 2a - 2a^3}{3(a^2 + a)} = \frac{z}{a^2 + a} + \frac{2}{3}\frac{1 - a^2}{1 + a} = \frac{z}{a^2 + a} + \frac{2}{3}(1 - a) = \frac{z}{a^2 + a} - \frac{2}{3}(a - 1)$.

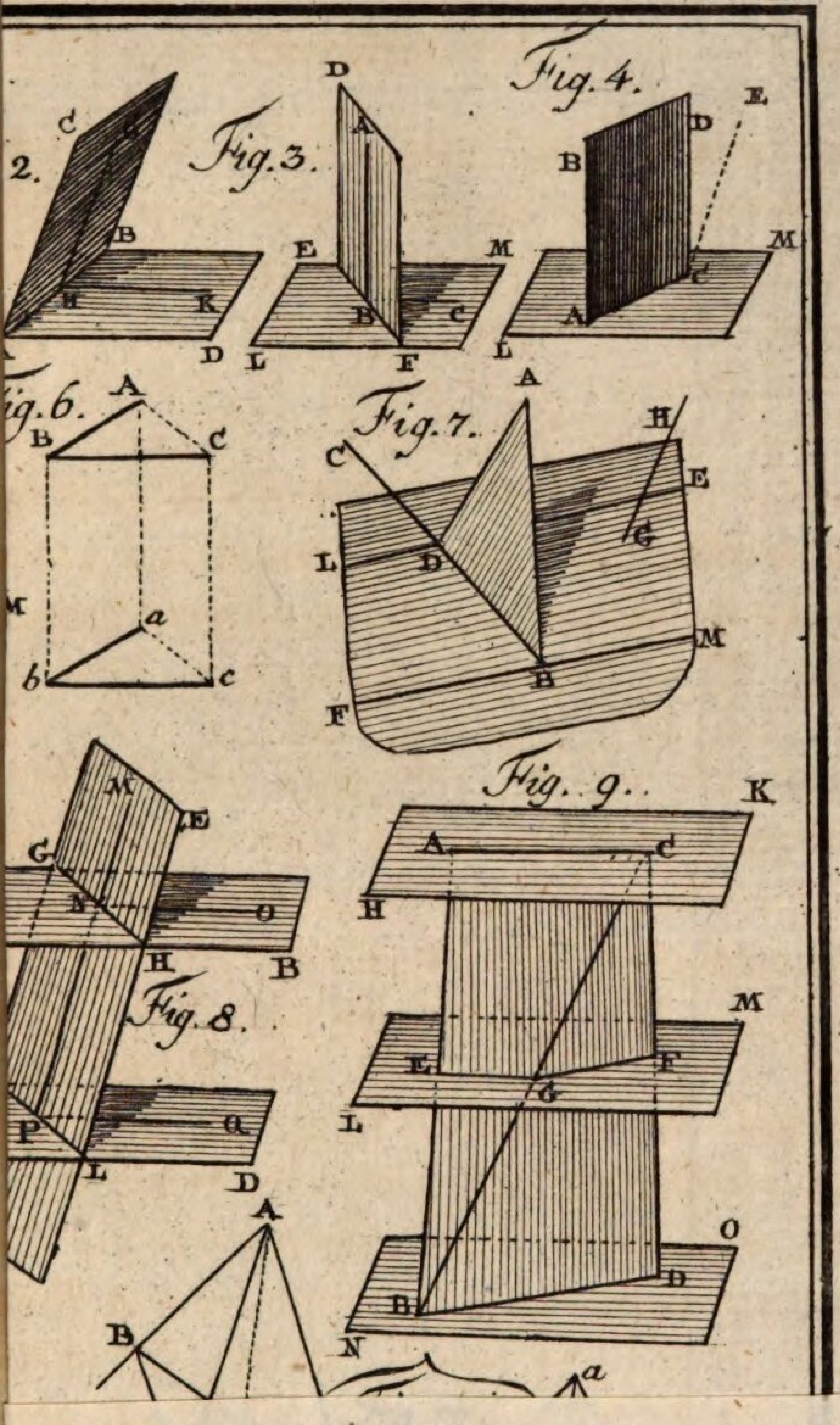
Anm. Die Auflösung der Aufgaben (§. 57. 58. 59.) läßt sich allgemein durch die Summation einer Reihe von Zahlen $a^n + b^n + c^n + d^n + \ldots h^n + k^n = S^{(n)}$ auflösen,

Bayerische Staatsbibliothek München

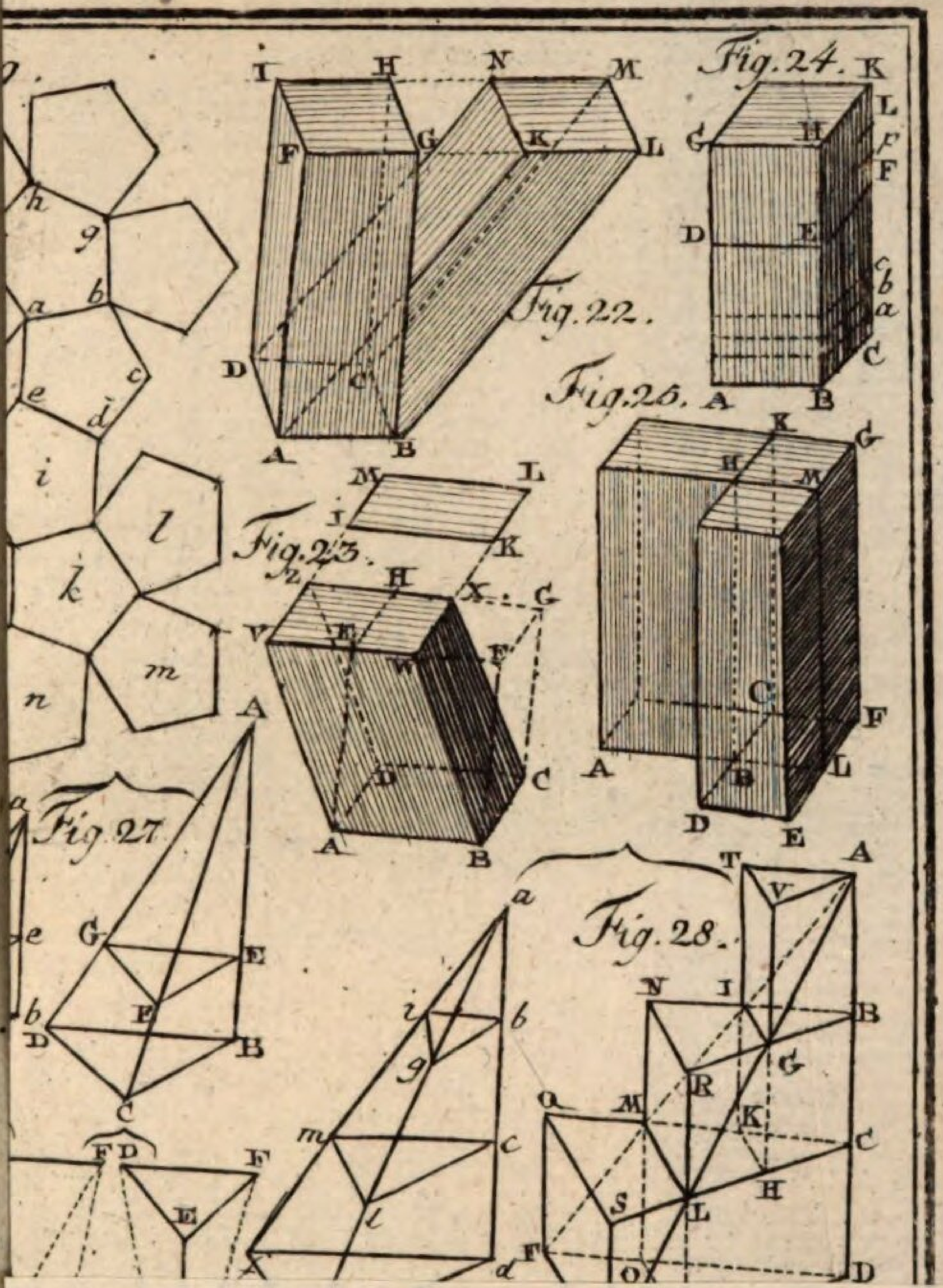
wenn man annimmt, daß $b = a + d$, $c = b + d$ rc. ist. Alsdann schließen die obigen Sätze nur einzelne Fälle in sich, die aus der allgemeinen Aufgabe leicht abgeleitet werden können. Weil sich aber die besondern Fälle leichter übersehen lassen, so habe ich die obige Entwickelung der figurirten Zahlen, meiner Absicht am angemessensten gefunden. Vega und mehrere andere Schriftsteller, haben jene Gleichungen aus den arithmethischen Reihen der 2ten und 3ten höhern Ordnung abgeleitet. M. s. Vega's Vorlesungen rc. P. 1. §. 236 — 247 (Aufl. 3.). Struensee hat in seiner Artillerie §. 109. IV. die Regel unrichtig ausgedruckt, welches auch schon Kästner in einem hierher gehörigen Aufsatze von der Berechnung der Kugelpyramiden bemerkt hat. Man vergl. hierrüber den 26sten Band des Hamburg. Magazins. Diesen Aufsatz hat auch Böhm in den 4ten Band s. M. für Ingenieur und Artilleristen aufgenommen. Beim Gebrauch dienen die, nach obigen Formeln berechneten Tafeln, zu einer wesentlichen Abkürzung. Eine kleine Tafel befindet sich am Ende des vorhin genannten Aufsatzes; ausführlicher in Vega's 2tem Bande seiner logarithmisch-trigonom. Tafeln S. 364—371. Für die Pyramiden sind die Gründe der Berechnung sehr deutlich vorgetragen in Hentschens Anweis. zu den mathemat. Wissenschaften und mit Rücksicht auf die andern Kugelhaufen in des Hrn. Gen. von Strampff Handbuch für Officiere, S. 262—273 Th. 1.

Bayerische Staatsbibliothek München

Tab. VII.



Tab. VIII.



Bayerische
Staatsbibliothek
München

L. Weber

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Zimmermann, Christian Gottlieb,

Grundriß der reinen Mathematik vorzüglich für angehende Artilleristen und Ingenieurs entworfen

Bd.: 2. Theil, welcher die ebene Trigonometrie, Körperlehre und Theorie der Kegelschnitte enthält. Mit 4

Berlin 1818

40.324-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10701837-2